

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Connexions hétérocliniques dans le problème des trois corps

Dufey, Julien

Award date:
2004

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Connexions hétérocliniques
dans le problème restreint des trois corps

Julien Dufey

Je tiens à remercier tout particulièrement Anne Lemaître pour sa disponibilité à tout instant et son aide indispensable à la réalisation de ce mémoire.

Je voudrais aussi remercier ma famille ainsi que Aline, Ariane, Fang-Yue et Laurent avec qui j'ai partagé de grands moments tout au long de cette année et qui m'ont soutenu durant toute la réalisation de ce travail.

Connexions hétérocliniques dans le problème restreint des trois corps

Résumé

Le cadre de ce travail est le problème plan circulaire restreint des trois corps. Nous développerons des techniques propres aux systèmes dynamiques afin de montrer l'existence de connexions hétérocliniques entre deux orbites périodiques ayant la même énergie. Ces orbites se trouvent autour des points de libration L_1 et L_2 . Nous rappellerons d'abord quelques propriétés du problème des trois corps. Ensuite, nous analyserons la géométrie des orbites autour de L_1 et L_2 . Nous démontrerons alors l'existence d'orbites homocliniques transversales et enfin celle d'orbites hétérocliniques. Nous concluons en appliquant à un transfert Terre-Lune les méthodes développées tout au long de ce travail.

Heteroclinic connections in the restricted three-body problem

Abstract

This work takes place in the planar circular restricted three-body problem. We develop dynamical systems techniques to show the existence of heteroclinic connections between two periodic orbits having the same energy level. These orbits lay around the libration points L_1 and L_2 . We first recall some properties of the three-body problem. Then we study the geometry of orbits around L_1 and L_2 . At the time we demonstrate the existence of transversal homoclinic orbits and finally the existence of heteroclinic orbits. We conclude by applying the methods developed during this work to the Earth-Moon transfer.

Table des matières

Introduction	2
1 Le problème des trois corps	5
1.1 Situation du problème	5
1.2 Structure Hamiltonienne du PPCR3C	8
1.3 Points d'équilibre de Lagrange	11
2 Le flot près des points d'équilibre L_1 et L_2	15
Préambule	15
2.1 Linéarisation près des équilibres colinéaires	16
2.2 Géométrie des solutions près des points de libration	19
2.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres des équations linéarisées	19
2.2.2 Changement d'axes et intégrales premières	22
2.2.3 Energie linéarisée dans les nouvelles coordonnées	24
2.2.4 L'espace de phase	25
2.2.5 Le flot dans \mathcal{R}	27
2.2.6 La représentation de McGehee	30
2.3 Orbites dans l'espace des positions (x, y)	32
3 Orbites homocliniques du PPCR3C	40
Préambule	40
3.1 Existence d'orbites homocliniques	42
3.1.1 Les théorèmes de McGehee	42
3.1.2 Preuve de l'existence d'orbites homocliniques	46
3.2 L'existence d'orbites homocliniques transversales dans la région intérieure	50
3.2.1 Résultats analytiques pour \overline{L}_1 dans la région intérieure	53
3.3 L'existence d'orbites homocliniques transversales dans la région extérieure	58

4	Connexions et cycles hétérocliniques	62
4.1	L'existence de connexions hétérocliniques	62
4.2	Les canaux dynamiques	65
5	Application : un transfert Terre-Lune	67
	Préambule	67
5.1	Le modèle des deux PPCR3C couplés	68
5.2	Construction du transfert Terre-Lune	69
5.2.1	1 ^{ère} partie : La capture balistique par la Lune	70
5.2.2	2 ^{ème} partie : Remonter jusqu'à la Terre	71
5.2.3	Connexion des deux parties	74
5.3	Brève conclusion	75
	Conclusion	76

Introduction

Dans ce travail, nous étudierons le problème plan circulaire restreint des trois corps afin de prouver l'existence de connexions hétérocliniques. Ces thèmes connaissent, depuis quelques temps déjà, un vif regain d'intérêt dans différents domaines.

On a par exemple remarqué que certaines comètes de Jupiter, comme Oterma et Gehrels 3, effectuaient un transit rapide d'une orbite héliocentrique à l'extérieur de l'orbite de Jupiter, à une autre orbite héliocentrique cette fois à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. Durant ce transit, les comètes passent très près des points de libration du problème restreint des trois corps, L_1 et L_2 .

Un autre exemple est la mission spatiale japonaise Hiten qui, en 1991, effectua un transfert Terre-Lune en utilisant une quantité moindre de fuel que lors d'un transfert classique. Cette mission se servit de la théorie du problème restreint des trois corps pour parvenir à ses fins.

Le but de ce travail est donc de développer les techniques qui rendent ces transits et ces transferts possibles, en se plaçant dans le cadre du problème plan circulaire restreint des trois corps.

Se placer dans ce cadre signifie en deux mots que nous nous intéresserons à la situation où deux corps, un généralement beaucoup plus massif que l'autre et que nous nommerons le Soleil et Jupiter, exercent une force d'attraction sur une troisième particule sans masse. Tous les mouvements se font dans le plan de rotation des deux corps et la particule est quant à elle libre de se mouvoir dans ce même plan.

Ce problème possède cinq points d'équilibre dits "de Lagrange" dont deux, L_1 et L_2 , se situent de part et d'autre de Jupiter, sur la droite Soleil-Jupiter. Chacun de ces deux équilibres possède une famille d'orbites périodiques qui dépendent du niveau d'énergie où l'on se situe. Ce travail s'attachera à l'étude des dynamiques relatives à ces orbites périodiques nommées orbites de Lyapunov, que l'on notera \overline{L}_1 et \overline{L}_2 .

Dans un premier temps, nous mettrons en place le cadre du problème. Nous étudierons la structure hamiltonienne du problème des trois corps et rappellerons quelques caractéristiques importantes concernant les points d'équilibre de Lagrange.

Par après, ayant fixé un niveau d'énergie approprié, nous étudierons le comportement des orbites dans la région proche d'un point d'équilibre. Pour cette partie, nous nous baserons sur l'article de référence de ce mémoire écrit par Koon, Lo, Marsden et Ross (2000). Cette étude nous permettra de mieux comprendre les dynamiques non linéaires du système. Nous mettrons en évidence l'importance particulière des variétés invariantes relatives à \overline{L}_1 et \overline{L}_2 .

Dans la partie suivante, nous reprendrons quelques résultats de Conley(1968) et McGehee (1969) concernant les orbites asymptotiques. Ensuite, nous illustrerons des méthodes numériques et semi-numériques de Koon *et al.* (2000) pour prouver l'existence d'orbites asymptotiques transversales.

Grâce au même genre de procédé nous montrerons alors l'existence de *connexions hétérocliniques* entre \overline{L}_1 et \overline{L}_2 . Nous définirons à ce moment la notion de canal dynamique, qui jouera en quelque sorte le rôle de guide d'orbites. Cette notion nous permettra de mieux comprendre le transport naturel de matière dans le Système Solaire.

Enfin, nous conclurons ce travail en appliquant les techniques développées précédemment à une orbite de transfert Terre-Lune, suivant un autre article de Koon *et al.* (2001).

Chapitre 1

Le problème plan circulaire restreint des trois corps (PPCR3C)

1.1 Situation du problème

Nous allons nous intéresser au problème plan circulaire restreint des trois corps (PPCR3C).

Le PPCR3C est un problème dans lequel le mouvement d'une particule est régi par l'effet gravitationnel de deux autres corps. Ces deux masses se déplacent selon des orbites circulaires autour de leur centre de masse (*circulaire*). Les mouvements de la troisième particule se font dans le plan formé par les orbites des deux masses (*plan*). Enfin, la particule n'a aucun effet sur les mouvements des deux autres corps (*restreint*).

Deux des corps, que nous appellerons généralement le *Soleil* et *Jupiter*, ont des masses respectives notées m_S et m_J . Nous utiliserons dans la suite leurs masses relatives, c'est-à-dire que nous prendrons pour le soleil : $\mu_S = m_S/(m_S + m_J)$ et pour Jupiter : $\mu = m_J/(m_S + m_J)$. Nous avons donc que $\mu_S = 1 - \mu$.

Dans le cas du Soleil et de Jupiter, $\mu = 0.0009537$.

Ces corps tournent donc dans le plan, dans le sens anti-horloger, autour de leur centre de masse avec une vitesse angulaire normalisée à un.

Le troisième corps, que nous appellerons la *comète* ou le *vaisseau spatial*, a une masse nulle et est libre de se mouvoir dans le plan formé par les orbites des deux autres corps. De plus, l'excentricité de Jupiter est très faible (0.0483) et nous considérerons que son orbite est circulaire. Le PPCR3C est donc un modèle adéquat pour représenter le système Soleil-Jupiter-comète.

Dans un repère inertiel, les positions respectives du Soleil, de Jupiter et de la comète sont (u_S, v_S) , (u_J, v_J) et (u, v) . Les distances de la comète au Soleil, à Jupiter et à l'origine sont respectivement r_1 , r_2 et r .

Les équations du mouvement de la comète dans ce système sont :

$$\begin{cases} \ddot{u} = (1 - \mu) \frac{u_S - u}{r_1^3} + \mu \frac{u_J - u}{r_2^3} \\ \ddot{v} = (1 - \mu) \frac{v_S - v}{r_1^3} + \mu \frac{v_J - v}{r_2^3} \end{cases} \quad (1.1)$$

où les unités ont été choisies de telle sorte que $\mathcal{G} = 1$. Remarquons aussi que durant tout ce travail, la notation \dot{x} signifie $\frac{dx}{dt}$ et que $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Nous choisissons maintenant un repère tournant avec Jupiter dans le plan de telle sorte que l'origine soit au centre de masse et tel que le Soleil et Jupiter soient fixés à $(-\mu, 0)$ et $(1 - \mu, 0)$. Dans ce repère, la position de la comète sera (x, y) .

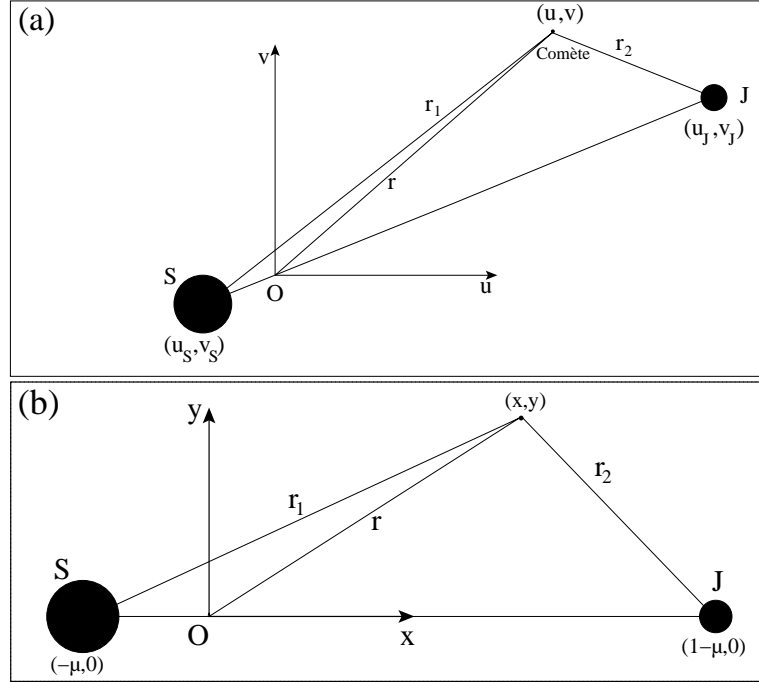


FIG. 1.1 – (a) Soleil, Jupiter et la comète dans le repère inertiel

(b) Repère tournant : les positions du Soleil, de Jupiter et de la comète.

Nous pouvons déduire l'expression de r_1 et r_2 dans le nouveau repère :

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2} \text{ et } r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.$$

Les anciennes coordonnées peuvent être reliées aux coordonnées du système tournant par une rotation :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y \end{pmatrix}.$$

En substituant u, v, \dot{u}, \dot{v} dans les équations du mouvement (1.1) et en remplaçant (x_S, y_S) et (x_J, y_J) respectivement par $(-\mu, 0)$ et $(1 - \mu, 0)$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \bullet (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \cos t - (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \sin t \\ &= \left((1 - \mu) \frac{-\mu - x}{r_1^3} + \mu \frac{(1 - \mu) - x}{r_2^3} \right) \cos t - \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) y \sin t \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \sin t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \cos t \\ &= \left((1 - \mu) \frac{-\mu - x}{r_1^3} + \mu \frac{(1 - \mu) - x}{r_2^3} \right) \sin t + \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) y \cos t. \quad (1.3) \end{aligned}$$

En manipulant ces équations comme suit :

$$\begin{cases} (1.2) \cos t + (1.3) \sin t \\ (1.2)(-\sin t) + (1.3) \cos t, \end{cases}$$

nous obtenons les équations de mouvement dans le système de rotation choisi :

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -(1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - (1 - \mu)}{r_2^3} \quad (1.4)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) y. \quad (1.5)$$

Définissons maintenant $\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}$ (nous expliquons pourquoi le terme $\mu(1 - \mu)/2$ est présent à la page 12). Les équations du mouvement s'écrivent alors plus simplement :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Rappelons enfin que ces équations sont écrites en système tournant.

1.2 Structure Hamiltonienne du PPCR3C

Dans cette section, nous allons trouver l'expression du Hamiltonien et montrer que c'est en fait une *intégrale première* du problème.

Cette intégrale première nous permettra de réduire d'une dimension la complexité du problème.

Ecrivons tout d'abord l'énergie cinétique T et le potentiel V dans le repère inertiel (u, v) .

$$T = \frac{\dot{u}^2}{2} + \frac{\dot{v}^2}{2} \qquad V = -\frac{(1-\mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

où $r_1^2 = (u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2$ et $r_2^2 = (u_2 - u)^2 + (v_2 - v)^2$.

Nous pouvons trouver le Lagrangien $L = T - V$, et ses dérivées nous donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \dot{u} = p_u \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \dot{v} = p_v$$

L'Hamiltonien $\mathcal{H}' = T + V$ s'écrit donc :

$$\mathcal{H}'(u, v, p_u, p_v) = \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \quad (1.7)$$

Nous définissons maintenant une transformation canonique dépendant du temps :

$$\begin{cases} u = (\cos t)x - (\sin t)y \\ v = (\sin t)x + (\cos t)y \end{cases} \quad (1.8)$$

qui définit en fait le passage des coordonnées dans le repère inertiel (u, v) au repère tournant (x, y) .

Cherchons maintenant une fonction génératrice $S(p_u, p_v, x, y, t)$. Elle devra satisfaire aux conditions :

$$u = \frac{\partial S}{\partial p_u} \quad v = \frac{\partial S}{\partial p_v} \quad p_x = \frac{\partial S}{\partial x} \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}.$$

En utilisant la transformation canonique (1.8), nous définirons :

$$S(p_u, p_v, x, y, t) = p_u((\cos t)x - (\sin t)y) + p_v((\sin t)x + (\cos t)y).$$

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial S}{\partial x} = \cos t(p_u) + \sin t(p_v) \\ p_y &= \frac{\partial S}{\partial y} = -\sin t(p_u) + \cos t(p_v). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le nouvel Hamiltonien \mathcal{H} s'écrira donc :

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \mathcal{H}'(x, y, p_x, p_y, t) - \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Evaluons $\partial S / \partial t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -p_u(\sin t)x - p_u(\cos t)y + p_v(\cos t)x - p_v(\sin t)y \\ &\stackrel{(1.9)}{=} xp_y - yp_x. \end{aligned}$$

Après calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - xp_y + yp_x \\ &= \frac{(x^2 - 2xp_y + p_y^2 + y^2 + 2yp_x + p_x^2) - (x^2 + y^2)}{2} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \\ &= \frac{(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \end{aligned}$$

Le Hamiltonien étant défini à une constante près, nous soustrairons de \mathcal{H} le terme $\mu(1-\mu)/2$. Pour finir, nous avons que :

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu(1-\mu)}{2} \quad (1.10)$$

où

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2} \text{ et } r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}.$$

Les équations de Hamilton nous donnent :

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x + y ; \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y - x \quad (1.11)$$

et

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = p_y - x + \Omega_x ; \dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -p_x - y + \Omega_y \quad (1.12)$$

où Ω_x et Ω_y sont les dérivées partielles par rapport à x et à y de

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}.$$

En utilisant (1.11) et (1.12), on retrouve bien les équations du mouvement du problème de départ (1.6) :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \end{cases} \quad (1.13)$$

Ces équations ont une intégrale première appelée *intégrale de Jacobi*, donnée par l'expression :

$$C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\Omega(x, y) = -2\mathcal{H}(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \quad (1.14)$$

En effet, dérivons $C(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -2\dot{x}\ddot{x} - 2\dot{y}\ddot{y} + 2\Omega_x\dot{x} + 2\Omega_y\dot{y} \\ &= \underbrace{2\dot{x}(\Omega_x - \ddot{x})}_{(1.13):-2\dot{y}} + \underbrace{2\dot{y}(\Omega_y - \ddot{y})}_{(1.13):-2\dot{x}} \\ &= -4\dot{x}\dot{y} + 4\dot{y}\dot{x} = 0. \end{aligned}$$

Les variétés d'énergie sont donc des surfaces à trois dimensions dans un espace à quatre dimensions.

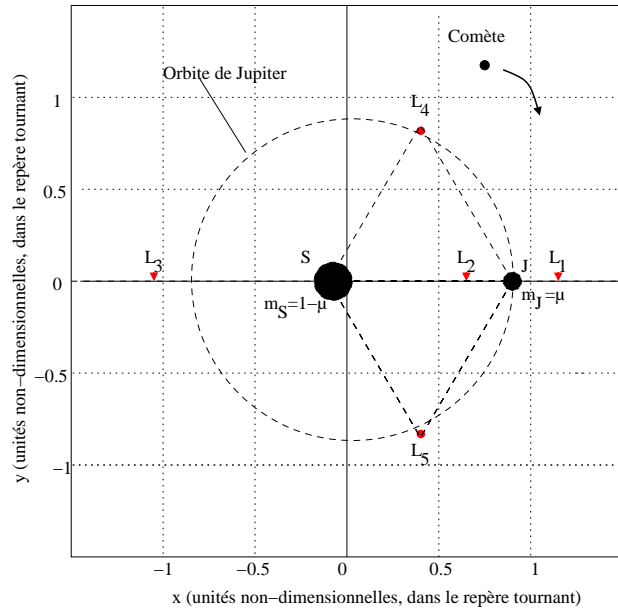


FIG. 1.2 – Schéma du problème des trois corps et visualisation des points d'équilibre de Lagrange de la section suivante, dans le repère tournant, où le Soleil et Jupiter sont fixés le long de l'axe des abscisses

1.3 Points d'équilibre de Lagrange

Pour cette section, nous nous sommes inspirés du mémoire de fin d'études de Valérie Dentant (1996). Il est bien connu que les équations du PPCR3C ont 5 points d'équilibre appelés les *équilibres de Lagrange*. Trois des équilibres sont colinéaires, deux de part et d'autre de Jupiter et un de l'autre côté du Soleil. Enfin, les deux derniers forment des triangles équilatéraux avec le Soleil et Jupiter.

Ces points d'équilibre sont les solutions du système (1.13) avec $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$ i.e. :

$$\begin{cases} \Omega_x = 0 \\ \Omega_y = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

où, pour rappel : $\Omega = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}$.

Ce système (1.15) possède cinq points d'équilibre dits "de Lagrange" (voir figure 1.2) dont les coordonnées dans le plan (x, y) sont :

$$\begin{array}{ll} L_1 : & x_0 = (1 - \mu) - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 + \dots & y_0 = 0 \\ L_2 : & x_0 = (1 - \mu) + \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 + \dots & y_0 = 0 \\ L_3 : & x_0 = -1 - \mu - \beta + \dots & y_0 = 0 \\ L_4 : & x_0 = \frac{1}{2} - \mu & y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ L_5 : & x_0 = \frac{1}{2} - \mu & y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

où $\alpha = \left(\frac{\mu}{3(1-\mu)}\right)^{1/3}$ et $\beta = \frac{-7}{12} \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$.

Lorsque le quotient $\frac{\mu}{1-\mu}$ devient petit, on peut approximer les abscisses de L_1 et L_2 par :

$$\begin{array}{ll} L_1 : & x_0 = (1 - \mu) - \alpha \\ L_2 : & x_0 = (1 - \mu) + \alpha. \end{array} \quad (1.16)$$

Par conséquent, en première approximation, les points d'équilibre L_1 et L_2 se trouvent respectivement à une distance $-\alpha$ et $+\alpha$ de Jupiter.

Pour résumer, L_1 , L_2 et L_3 sont les trois équilibres colinéaires tandis que L_4 et L_5 sont les sommets des triangles équilatéraux formés avec le Soleil et Jupiter.

Les valeurs de l'intégrale de Jacobi aux points L_i peuvent être facilement calculées et seront notées C_i . Nous les avons calculées pour une valeur de $\mu = 0.0009537$:

$$\begin{array}{ll} C_1 = 3.03970909 & C_3 = 3.00190647 \\ C_2 = 3.03843723 & C_4 = C_5 = 3. \end{array}$$

Nous avons tracé leur graphe pour de petites valeurs de μ (voir figure 1.3).

Remarque : Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi nous avons ajouté le terme $\mu(1 - \mu)/2$ dans Ω . Calculons la valeur de C_4 (ou C_5), c'est-à-dire de la constante de Jacobi au point d'équilibre L_4 (ou L_5). Nous avons pour cela besoin de calculer la valeur de Ω en ce point où $r_1 = r_2 = 1$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4} + \mu^2 - \mu \right) + \frac{3}{4} \right] + (1 - \mu) + \mu + \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{\mu^2 - \mu}{2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Par (1.14) et comme nous évaluons C à un équilibre, nous obtenons :

$$C_4 = C_5 = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\Omega = 2\Omega = 3.$$

Nous avons donc ajouté le terme $\mu(1 - \mu)/2$ à Ω dans le but de fixer C_4 et C_5 à 3 pour n'importe quelle valeur de μ .

Définissons maintenant **la région de Hill** :

On considère les équations du mouvement (1.13) sur la surface d'énergie où nous fixons l'intégrale de Jacobi (1.14) à une constante. Soit \mathcal{M} cette surface d'énergie, i.e.,

$$\mathcal{M}(\mu, C) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) | C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \text{constante}\}.$$

La projection de cette surface sur l'espace des positions (x, y) est appelée :

$$\underline{\text{la région de Hill}} \equiv M(\mu, C) = \{(x, y) | \Omega(x, y) \geq C/2\}.$$

La région de Hill est donc la partie du plan (x, y) où la comète est autorisée à se mouvoir pour un certain niveau d'énergie donné au départ.

Remarquons que lorsque nous parlerons d'une surface à quatre dimensions, c'est-à-dire dans l'espace (x, y, \dot{x}, \dot{y}) , nous la noterons en lettres rondes, tandis que sa projection sur le plan (x, y) sera notée en lettres droites. Par exemple, la surface d'énergie est notée \mathcal{M} et sa projection, la région de Hill, est notée M .

Pour un certain μ , il y a cinq configurations de base possibles pour la région de Hill, les quatre premières étant représentées sur la figure 1.4. Le cinquième cas est celui où la comète est libre de bouger dans le plan entier et ne nous intéressera pas. Nous aurons que :

- La courbe qui borne $M(\mu, C)$ correspond à la courbe dite “de vitesse nulle” de la surface.
- La comète ne peut se mouvoir qu’à l’intérieur de cette région (la région blanche) dans le plan (x, y) . La région grisée sera donc appelée *région interdite*.
- La petite région à droite est la *région de Jupiter*, notée **J**.
- La région qui ressemble à un cercle vers le centre des figures et qui entoure le soleil est la *région intérieure*, notée **I**.
- La région en dehors de la région interdite est la *région extérieure* et est notée **X**.

Dans ce travail, nous nous intéresserons principalement au troisième cas, celui où $C_2 > C > C_3$ pour que la comète puisse voyager de X à I, en passant par J.

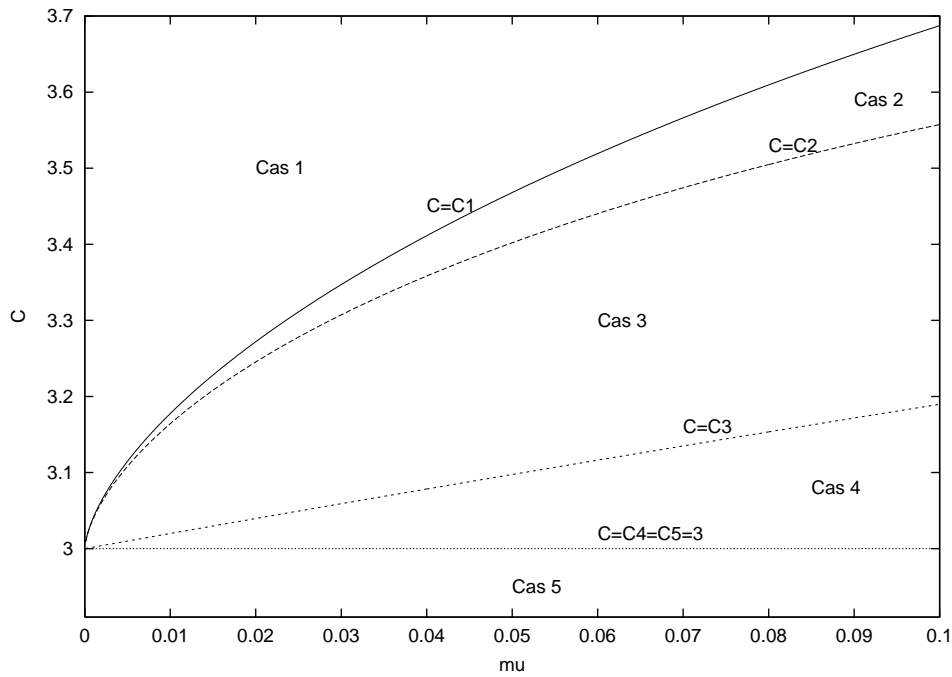


FIG. 1.3 – Graphe de C , la constante de Jacobi, en fonction de μ , où $\mu = 0.07$.

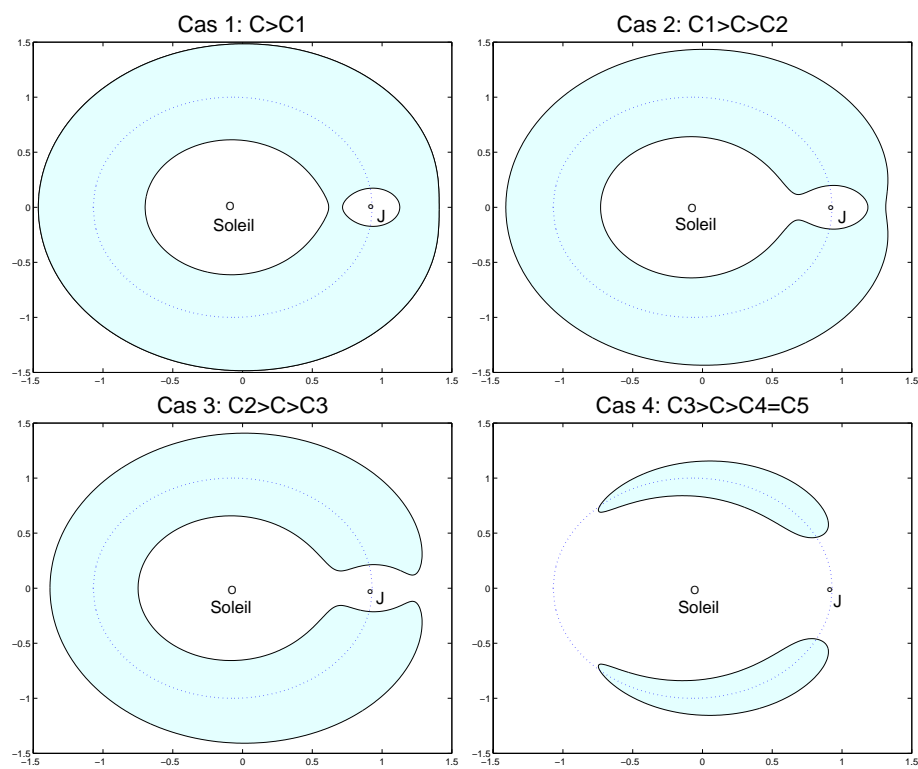


FIG. 1.4 – Quatre configurations différentes de la région de Hill.

Chapitre 2

Le flot près des points d'équilibre L_1 et L_2

Préambule

Dans ce chapitre, nous nous inspirerons de notre article de référence très condensé, celui de Koon *et al.* (2000), pour analyser la géométrie des orbites dans un voisinage des points d'équilibre. C'est un élément essentiel à la compréhension des dynamiques non linéaires.

- * Dans un premier temps, nous procéderons à la linéarisation des équations du mouvement autour des équilibres. Nous aurons alors besoin de calculer le Hamiltonien linéarisé.
- * Nous calculerons ensuite les valeurs propres et vecteurs propres de ces équations linéarisées.
- * Nous utiliserons alors ces vecteurs propres comme nouveaux axes du système et nous réécrivons les équations et le Hamiltonien linéarisé dans les nouvelles coordonnées.
- * Par la suite, nous pourrions dresser un portrait qualitatif de l'espace de phase dans ces coordonnées. La représentation de McGehee (1969) nous permettra de visualiser les choses plus aisément. Nous verrons qu'il existe quatre classes d'orbites particulières.
- * Enfin, nous analyserons la structure des orbites dans les anciennes coordonnées, celles qui nous intéressent, c'est-à-dire dans l'espace (x, y) . Nous retrouverons les mêmes classes d'orbites que dans la partie précédente.

2.1 Linéarisation près des équilibres colinéaires

Pour commencer, nous allons effectuer la linéarisation des équations de la dynamique autour des équilibres colinéaires en $y = 0$.

Pour trouver les équations linéarisées autour du point d'équilibre L (qui sera L_1 ou L_2), de coordonnées $(k, 0)$, nous allons développer le Hamiltonien (1.10) que nous rappelons ci-dessous :

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2}{2} - \underbrace{\left(\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \right)}_{\Omega}$$

autour de l'équilibre, en $(x, y) = (k, 0)$. Par les équations (1.11) où $\dot{x} = \dot{y} = 0$ (équilibre), on a

$$\begin{aligned} p_x &= -y \\ p_y &= x. \end{aligned}$$

Développons donc $\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y)$ autour de l'équilibre L de coordonnées $(k, 0, 0, k)$.

Comme les dérivées premières de \mathcal{H} à l'équilibre s'annulent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) &= \mathcal{H}(k, 0, 0, k) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}(k, 0, 0, k)}{\partial x^2} (x - k)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \mathcal{H}(k, 0, 0, k)}{\partial x \partial y} (x - k)y + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{H}(k, 0, 0, k)}{\partial p_y^2} (p_y - k)^2 \right] + \dots \quad (2.1) \end{aligned}$$

Calculons les dérivées secondes du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = x - p_y - \Omega_x \\ \Rightarrow & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} = 1 - \Omega_{xx}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial y} = -\Omega_{xy}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial p_x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial p_y} = -1 \\ \bullet \quad & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = y + p_x - \Omega_y \\ \Rightarrow & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y^2} = 1 - \Omega_{yy}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y \partial x} = -\Omega_{yx}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y \partial p_x} = 1, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y \partial p_y} = 0 \\ \bullet \quad & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = y + p_x \\ \Rightarrow & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_x \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_x \partial p_y} = 0 \\ \bullet \quad & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = -x + p_y \\ \Rightarrow & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_y \partial x} = -1, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_y \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_y \partial p_x} = 0. \end{aligned}$$

et donc (2.1) devient,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = & \mathcal{H}(k, 0, 0, k) + \frac{1}{2} \left[(1 - \Omega_{xx}(k, 0))(x - k)^2 - (x - k)(p_y - k) - \right. \\ & \left. 2\Omega_{xy}(x - k)y + (1 - \Omega_{yy}(k, 0))y^2 + 2yp_x + p_x^2 - (p_y - k)(x - k) + (p_y - k)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Il nous faut donc calculer les dérivées secondes de Ω et les évaluer à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \Omega(x, y) &= \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \\ \leadsto \Omega_x(x, y) &= x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3} \\ \leadsto \Omega_y(x, y) &= y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\ \Rightarrow \cdot \Omega_{xx}(x, y) &= 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{3(1 - \mu)(x + \mu)^2}{r_1^5} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu(x - 1 + \mu)^2}{r_2^5} \\ \cdot \Omega_{yy}(x, y) &= 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{3(1 - \mu)y^2}{r_1^5} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu y^2}{r_2^5} \\ \cdot \Omega_{xy}(x, y) = \Omega_{yx}(x, y) &= \frac{3(1 - \mu)(x + \mu)y}{r_1^5} + \frac{3\mu(x - 1 + \mu)y}{r_2^5} \end{aligned}$$

Evaluons maintenant r_1 et r_2 au point d'équilibre, i.e. $(k, 0, 0, k)$:

$$\begin{aligned} r_1(x, y) &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2} \\ \leadsto r_1(k, 0) &= |k + \mu| \\ r_2(x, y) &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2} \\ \leadsto r_2(k, 0) &= |k - 1 + \mu| \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \Omega_{xx}(k, 0) &= 1 + \frac{2(1 - \mu)}{|k + \mu|^3} + \frac{2\mu}{|k - 1 + \mu|^3} = a \\ \Omega_{yy}(k, 0) &= 1 - \frac{1 - \mu}{|k + \mu|^3} - \frac{\mu}{|k - 1 + \mu|^3} = -b \\ \Omega_{xy}(k, 0) = \Omega_{yx}(k, 0) &= \frac{3(1 - \mu)|k + \mu|.0}{|k + \mu|^5} + \frac{3\mu|k - 1 + \mu|.0}{|k - 1 + \mu|^5} = 0 \end{aligned}$$

(2.2) devient alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) &= \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \left[((x-k)^2 - 2(x-k)(p_y-k) + (p_y-k)^2) + (y^2 + 2yp_x + p_x^2) - \right. \\ &\quad \left. a(x-k)^2 + by^2 \right] + \dots \\ &= \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \left[(p_y-x)^2 + (y+p_x)^2 - a(x-k)^2 + by^2 \right] + \dots\end{aligned}$$

où \mathcal{H}_0 est le Hamiltonien évalué en l'équilibre, c'est-à-dire une constante, et où, par concision, nous notons $a = \Omega_{xx}(k, 0)$ et $b = -\Omega_{yy}(k, 0)$.

Ensuite, après avoir fait un changement de coordonnées avec $(k, 0, 0, k)$ comme origine, nous obtenons un Hamiltonien simplifié noté \mathcal{H}_l

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{2} \left[(p'_y - x')^2 + (y' + p'_x)^2 - ax'^2 + by'^2 \right] \quad (2.3)$$

où $x' = x - k$, $p'_y = p_y - k$, $y' = y$ et $p'_x = p_x$.

Les équations de Hamilton nous donnent :

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial p'_x} = p'_x + y', & \dot{p}'_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial x'} = p'_y - x' + ax' \\ \dot{y}' &= \frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial p'_y} = p'_y - x', & \dot{p}'_y &= -\frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial y'} = -p'_x - y' - by'.\end{aligned} \quad (2.4)$$

Par la suite, nous écrirons x, y, p_x et p_y au lieu de x', y', p'_x et p'_y dans \mathcal{H}_l afin de ne pas alourdir les formules.

Pour retrouver l'énergie, nous allons introduire les transformations : $v_x = p_x + y$, $v_y = p_y - x$, où v_x et v_y correspondent aux vitesses dans le repère tournant. Alors, les équations (2.4) deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= 2v_y + ax \\ \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_y &= -2v_x - by\end{aligned} \quad (2.5)$$

et le Hamiltonien \mathcal{H}_l de (2.3) nous apparait maintenant comme :

$$\mathcal{H}_l(x, y, p_x, p_y) = E_l(x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 - ax^2 + by^2). \quad (2.6)$$

Nous remarquons que ces calculs sont valables pour chacun des trois équilibres colinéaires, bien que les valeurs de a et de b soient différentes dans chacun des cas.

Par exemple, pour une masse relative de Jupiter $\mu = 0.0009537$, les valeurs de a et de b sont approximativement de

$$\begin{aligned}a &= 9.892, & b &= 3.446 & \text{pour } L_1 \text{ et} \\ a &= 8.246, & b &= 2.623 & \text{pour } L_2.\end{aligned}$$

2.2 Géométrie des solutions près des points de libration

2.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres des équations linéarisées

Analysons maintenant les équations linéarisées (2.5) :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -b & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Et si nous notons :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -b & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

(2.7) devient :

$$\frac{d}{dt}P = CP.$$

Cherchons les valeurs propres de ce système linéarisé :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 1 \\ a & 0 & -s & 2 \\ 0 & -b & -2 & -s \end{vmatrix} &= -s \begin{vmatrix} -s & 0 & 1 \\ 0 & -s & 2 \\ -b & -2 & -s \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -s & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & -b & -s \end{vmatrix} \\ &= s^2(s^2 + 4) + s^2b - as^2 - ab \\ &= s^4 + s^2(4 + b - a) - ab = 0. \end{aligned}$$

Le réalisant $\rho = 16 + a^2 + b^2 + 2ab + 8b - 8a$ est positif pour les valeurs de a et b en L_1 et L_2 données à la fin du paragraphe précédent.

$$\Rightarrow s^2 = \frac{a - b - 4 \pm \sqrt{\rho}}{2}$$

On aura alors une valeur de s^2 positive et une autre négative (en remplaçant de nouveau les valeurs de a et b en L_1 et L_2), ce qui veut dire que le système admettra quatre valeurs propres :

- $\pm\lambda$ si $s^2 > 0$, avec $\lambda = \sqrt{s^2}$
- $\pm i\nu$ si $s^2 < 0$, avec $\nu = \sqrt{-s^2}$

Les points de libration seront donc en quelque sorte le produit d'un point de selle et d'un centre.

Cherchons maintenant les vecteurs propres correspondants à ces quatre valeurs propres :

1) Valeur propre λ

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & -b & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda\alpha + \gamma = 0 & (1) \\ -\lambda\beta + \delta = 0 & (2) \\ a\alpha - \lambda\gamma + 2\delta = 0 & (3) \\ -b\beta - 2\gamma - \lambda\delta = 0 & (4) \end{cases}$$

Fixons $\alpha = 1 \xrightarrow{(1)} \gamma = \lambda \xrightarrow{(3)} \delta = -\frac{a-\lambda^2}{2} \xrightarrow{(2)} \beta = \frac{-a+\lambda^2}{2\lambda}$.

Posons $\sigma = \frac{a-\lambda^2}{2\lambda}$ et tout vecteur propre correspondant à la valeur propre λ est proportionnel à :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma \\ \lambda \\ -\lambda\sigma \end{pmatrix}$$

2) Valeur propre $-\lambda$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & -b & -2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda\alpha + \gamma = 0 & (1) \\ \lambda\beta + \delta = 0 & (2) \\ a\alpha + \lambda\gamma + 2\delta = 0 & (3) \\ -b\beta - 2\gamma + \lambda\delta = 0 & (4) \end{cases}$$

Fixons $\alpha = 1 \xrightarrow{(1)} \gamma = -\lambda \xrightarrow{(3)} \delta = -\frac{a-\lambda^2}{2} \xrightarrow{(2)} \beta = \frac{a-\lambda^2}{2\lambda}$.

Tout vecteur propre correspondant à la valeur propre $-\lambda$ est proportionnel à :

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \\ -\lambda \\ -\lambda\sigma \end{pmatrix}$$

3) Valeur propre $i\nu$

$$\begin{pmatrix} -i\nu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\nu & 0 & 1 \\ a & 0 & -i\nu & 2 \\ 0 & -b & -2 & -i\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -i\nu\alpha + \gamma = 0 & (1) \\ -i\nu\beta + \delta = 0 & (2) \\ a\alpha - i\nu\gamma + 2\delta = 0 & (3) \\ -b\beta - 2\gamma - i\nu\delta = 0 & (4) \end{cases}$$

Fixons $\alpha = 1 \xrightarrow{(1)} \gamma = i\nu \xrightarrow{(3)} \delta = -\frac{a+i\nu^2}{2} \xrightarrow{(2)} \beta = i\frac{a+i\nu^2}{2\nu}$.

Posons $\tau = -\frac{a+i\nu^2}{2\nu}$ et tout vecteur propre correspondant à la valeur propre $i\nu$ est proportionnel à

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\tau \\ i\nu \\ \nu\tau \end{pmatrix}$$

4) Valeur propre $-i\nu$

$$\begin{pmatrix} i\nu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i\nu & 0 & 1 \\ a & 0 & i\nu & 2 \\ 0 & -b & -2 & i\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\nu\alpha + \gamma = 0 & (1) \\ i\nu\beta + \delta = 0 & (2) \\ a\alpha + i\nu\gamma + 2\delta = 0 & (3) \\ -b\beta - 2\gamma + i\nu\delta = 0 & (4) \end{cases}$$

Fixons $\alpha = 1 \xrightarrow{(1)} \gamma = -i\nu \xrightarrow{(3)} \delta = -\frac{a+i\nu^2}{2} \xrightarrow{(2)} \beta = -i\frac{a+i\nu^2}{2\nu}$.

Tout vecteur propre correspondant à la valeur propre $-i\nu$ est proportionnel à

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\tau \\ -i\nu \\ \nu\tau \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Changement d'axes et intégrales premières

Maintenant que nous avons les quatre vecteurs propres associés aux quatre valeurs propres de la matrice C , nous avons la relation suivante :

$$C = VDV^{-1}, \quad (2.8)$$

où

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sigma & \sigma & -i\tau & i\tau \\ \lambda & -\lambda & i\nu & -i\nu \\ -\lambda\sigma & -\lambda\sigma & \nu\tau & \nu\tau \end{pmatrix}$$

est la matrice des vecteurs propres et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\nu \end{pmatrix}.$$

En injectant (2.8) dans $\frac{d}{dt}P = CP$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P &= VDV^{-1}P \\ \Rightarrow V^{-1}\frac{d}{dt}P &= \frac{d}{dt}(V^{-1}P) = DV^{-1}P, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les équations différentielles (2.7) deviennent :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

où $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = V^{-1}P$ sont les variables et moments dans le nouveau système où les axes sont les vecteurs propres u_1, u_2, w_1, w_2 .

Nous allons maintenant effectuer un changement linéaire de coordonnées pour éviter d'avoir des parties imaginaires dans les équations :

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 & \zeta_1 &= x_3 + ix_4 \\ \eta &= x_2 & \zeta_2 &= ix_3 + x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{\zeta}_1 &= \dot{x}_3 + i\dot{x}_4 = i\nu x_3 + i(-i\nu x_4) = \nu\zeta_2 \text{ et} \\ \dot{\zeta}_2 &= i\dot{x}_3 + \dot{x}_4 = i(i\nu x_3) - i\nu x_4 = -\nu\zeta_1.\end{aligned}$$

Le système différentiel (2.9) devient alors :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \lambda\xi \\ \dot{\eta} &= -\lambda\eta \\ \dot{\zeta}_1 &= \nu\zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= -\nu\zeta_1.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Deux des équations différentielles donnent une solution immédiate :

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \xi^0 e^{\lambda t} \\ \text{et } \eta(t) &= \eta^0 e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Pour ζ_1 et ζ_2 , nous avons les solutions :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \nu\zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -\nu\zeta_1 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\zeta}_1 = -\nu^2\zeta_1,$$

ce qui signifie

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= A \cos \nu t + B \sin \nu t \\ \Rightarrow \zeta_2 &= \frac{1}{\nu} \dot{\zeta}_1 = -A \sin \nu t + B \cos \nu t \\ &\text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}\end{aligned}$$

Alors, si nous posons $\zeta(t) = \zeta_1(t) + i\zeta_2(t)$, nous avons

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= A \cos \nu t + B \sin \nu t - iA \sin \nu t + iB \cos \nu t \\ &= (A + iB)(\cos \nu t - i \sin \nu t) \\ &= (A + iB)e^{-i\nu t} = \zeta^0 e^{-i\nu t}.\end{aligned}$$

Pour résumer, les solutions de (2.10) sont :

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \xi^0 e^{\lambda t}, \quad \eta(t) = \eta^0 e^{-\lambda t} \\ \zeta(t) &= \zeta_1(t) + i\zeta_2(t) = \zeta^0 e^{-i\nu t}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Nous remarquons que les fonctions $\eta\xi$ et $|\zeta|^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$ sont des intégrales premières du problème. En effet :

$$\frac{d}{dt}(\eta\xi) = \dot{\eta}\xi + \eta\dot{\xi} \stackrel{(2.10)}{=} -\lambda\eta\xi + \lambda\eta\xi = 0 \quad \text{et} \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = 2(\zeta_1\dot{\zeta}_1 + \zeta_2\dot{\zeta}_2) \stackrel{(2.10)}{=} 2\nu(\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2\zeta_1) = 0 \tag{2.13}$$

2.2.3 Energie linéarisée dans les nouvelles coordonnées

Nous cherchons maintenant une expression de E_l en fonction des nouvelles variables.

Si nous considérons $(\xi, \zeta_1, \eta, \zeta_2)$ comme un nouvel ensemble de variables canoniques, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \lambda\xi = \frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial \eta} & \dot{\eta} &= -\lambda\eta = -\frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial \xi} \\ \dot{\zeta}_1 &= \nu\zeta_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial \zeta_2} & \dot{\zeta}_2 &= -\nu\zeta_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}_l}{\partial \zeta_1}.\end{aligned}$$

On réécrit ensuite facilement le Hamiltonien correspondant à la dynamique en intégrant les équations découplées de ce système :

$$\mathcal{H}_l = \lambda\xi\eta + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2). \quad (2.14)$$

Remarque : Pour vérifier nos résultats concernant les valeurs propres et vecteurs propres du système linéarisé, nous avons choisi la procédure introduite par les auteurs de notre article de référence ; ils travaillent avec l'énergie et non avec le Hamiltonien.

Signalons que les différentes transformations effectuées entre nos variables et moments de départ (x, y, p_x, p_y) et d'arrivée $(\xi, \zeta_1, \eta, \zeta_2)$ ne sont *pas* canoniques : elles transforment un système hamiltonien en un autre système hamiltonien, mais non pas tout système hamiltonien en autre système hamiltonien, comme devrait le faire une transformation canonique.

2.2.4 L'espace de phase

Pour des valeurs positives de \mathcal{E} et c , définissons la région \mathcal{R} par

$$\mathcal{R} = \{(\eta, \xi, \zeta_1, \zeta_2) | \mathcal{H}_l = \mathcal{E}, |\eta - \xi| \leq c\}.$$

Pour des valeurs fixées de $\eta - \xi \in [-c, c]$ et de \mathcal{E} , on voit que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{H}_l \\ &= \frac{\lambda}{4}(4\xi\eta) + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\ &= \frac{\lambda}{4}(2\xi\eta + \xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2 - \eta^2) + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\ &= \frac{\lambda}{4}((\eta + \xi)^2 + (\eta - \xi)^2) + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\ &\Rightarrow \frac{\lambda}{4}(\eta + \xi)^2 + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = \mathcal{E} + \frac{\lambda}{4}(\eta - \xi)^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nous remarquons que (2.15) est l'équation d'une sphère (ou plus précisément d'un ellipsoïde) de rayon $\sqrt{\mathcal{E} + \frac{\lambda}{4}(\eta - \xi)^2}$ dans le plan $(\zeta_1, \zeta_2, \eta + \xi)$. La région \mathcal{R} est donc le produit d'une sphère et d'un intervalle.

Puisque l'on fixe les valeurs $\eta - \xi$ entre $-c$ et c , nous aurons deux sphères limites qui borneront la surface \mathcal{R} :

- la sphère \mathbf{n}_1 , pour laquelle $\eta - \xi = -c$,
- la sphère \mathbf{n}_2 , pour laquelle $\eta - \xi = +c$

Remarque : nous expliquons dans le paragraphe suivant pourquoi n_1 et n_2 sont vues comme des sphères.

Nous utiliserons également quelques notions assez intuitives. Quand nous nous réfèrerons à l'ensemble des points pour lequel :

- $\eta + \xi = 0$, nous le nommerons **l'équateur**,
- $\eta + \xi > 0$, nous le nommerons **l'hémisphère nord**,
- $\eta + \xi < 0$, nous le nommerons **l'hémisphère sud**.

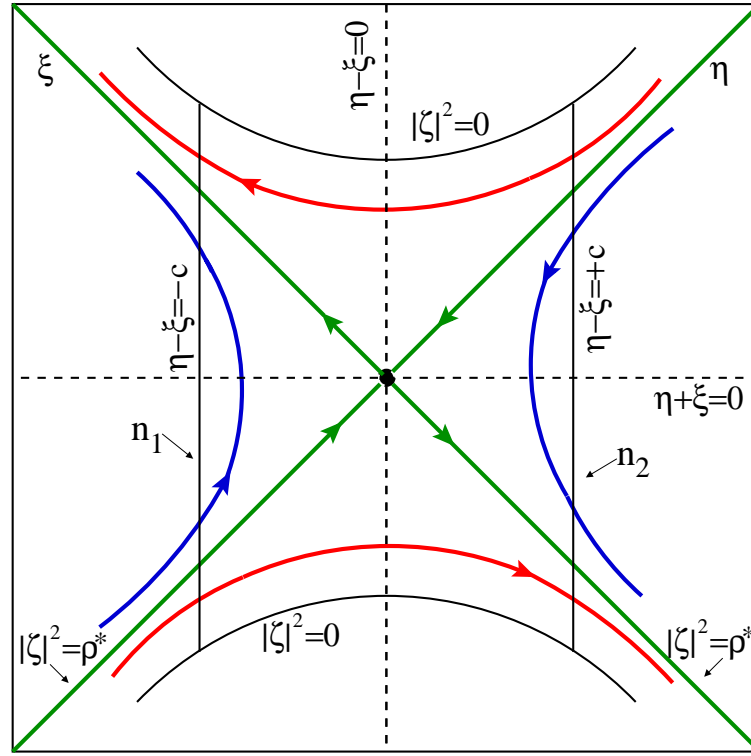


FIG. 2.1 – Projections des orbites proches du point d'équilibre dans le plan (η, ξ) , où les axes sont inclinés à 45° pour correspondre aux figures suivantes. On voit l'orbite périodique (point noir au centre), les orbites asymptotiques (convergeant ou partant du centre, en vert), deux orbites de transit (allant d'un côté à l'autre de la figure, en rouge) et deux orbites de non transit (qui restent du même côté de la figure, en bleu).

2.2.5 Le flot dans \mathcal{R}

Pour analyser le flot dans la région \mathcal{R} , on considère la projection de \mathcal{R} sur le plan (η, ξ) . La figure 2.1 illustre schématiquement le flot dans ce plan.

Un simple regard aux équations (2.11) nous montre que le sens des orbites est bien celui indiqué par les flèches de la figure.

Reprenons l'équation (2.14) de l'énergie linéarisée :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_l = \mathcal{E} &= \lambda\xi\eta + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\ \Rightarrow \eta\xi &= \frac{\mathcal{E}}{\lambda} - \frac{\nu}{2\lambda}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2).\end{aligned}$$

Si $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = |\zeta|^2 = 0$, on a $\eta\xi = \frac{\mathcal{E}}{\lambda}$.

La projection de la région \mathcal{R} dans le plan (η, ξ) est donc bornée (voir figure 2.1) :

- de deux côtés par les droites $\eta - \xi = \pm c$ (qui correspondent aux deux sphères n_1 et n_2 dans \mathcal{R}),
- des deux autres côtés par une hyperbole d'équation $\eta\xi = \frac{\mathcal{E}}{\lambda}$ (càd $|\zeta|^2 = 0$).

Puisque $\eta\xi$ est une intégrale première des équations dans la région \mathcal{R} (voir équation 2.12), la projection des orbites sur le plan (η, ξ) correspond à une hyperbole d'équation $\eta\xi = \text{constante}$:

- dans le cas $\eta\xi > 0$ (i.e. η et ξ de même signe), les orbites connectent les bornes n_1 et n_2 ($\eta - \xi = \pm c$, droites sur la figure 2.1)
- dans le cas $\eta\xi < 0$ (i.e. η et ξ de signes opposés), elles ont les deux extrémités sur la même borne (n_1 ou n_2).
- dans le cas $\eta\xi = 0$ ($\eta = 0$ ou $\xi = 0$), les orbites correspondront aux axes η et ξ .

Pour interpréter la figure 2.1 comme un flot dans \mathcal{R} , il faut noter que chaque point du plan (η, ξ) correspond en fait à un cercle dans \mathcal{R} .

Le rayon $\rho = |\zeta|$ de chaque cercle (différent pour chaque point du plan (η, ξ)) peut être calculé facilement grâce à l'équation (2.14) de l'énergie linéarisée :

$$\rho^2 = |\zeta|^2 = \frac{2}{\nu}(\mathcal{E} - \lambda\eta\xi). \quad (2.16)$$

Bien entendu, pour les points sur l'hyperbole qui borne \mathcal{R} ($\eta\xi = \mathcal{E}/\lambda$), ρ devient nul, ce qui signifie que le cercle se réduit à un point.

Enfin, n_1 et n_2 (vus comme des segments dans le plan (η, ξ)) sont bien des sphères dans \mathcal{R} . En effet, chaque point de n_1 et n_2 correspond à un cercle dans \mathcal{R} , et les extrémités de n_1 et n_2 correspondent à un seul point puisqu'elles sont également sur l'hyperbole qui borne \mathcal{R} .

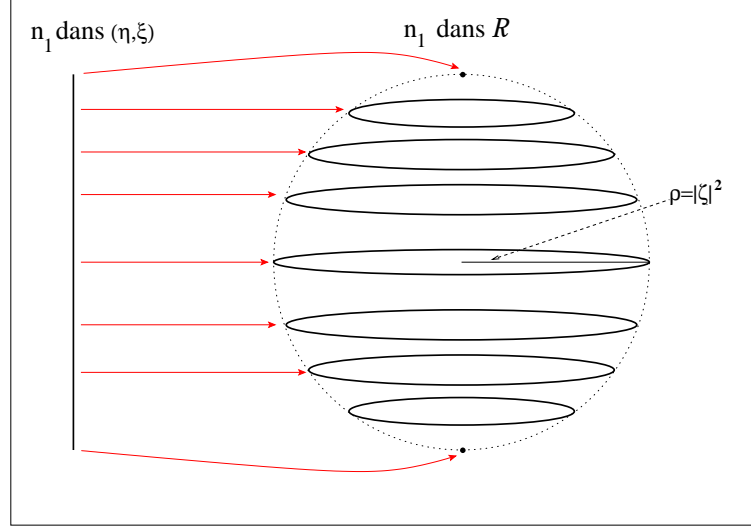


FIG. 2.2 – Visualisation de la sphère n_1 dans \mathcal{R} . On remarque que chaque point de n_1 dans (η, ξ) correspond à un cercle dans \mathcal{R} .

Nous distinguerons quatre catégories d'orbites :

(1) Le point $\xi = \eta = 0$ correspond à l'orbite **périodique** instable (**l'orbite de Lyapunov**). C'est le point noir au centre de la figure 2.1.

(2) Les quatre demi-droites sur les axes, c'est-à-dire où $\eta\xi = 0$, correspondent à quatre cylindres d'orbites asymptotiques à la solution périodique, que le temps augmente ($\eta = 0$) ou diminue ($\xi = 0$).

Vérifions que ce sont bien des cylindres. Si $\eta\xi = 0$ ($\eta = 0$ ou $\xi = 0$), par l'équation (2.16), on a

$$|\zeta|^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \rho^{*2}, \text{ où } \rho^* = \sqrt{2\mathcal{E}/\nu} = \text{constante}$$

ce qui correspond bien à l'équation d'un cylindre.

Ces orbites seront appelées orbites **asymptotiques**. Ce sont les quatre demi-droites vertes de la figure 2.1.

(3) Les segments hyperboliques déterminés par $\eta\xi = \text{constante} > 0$, c'est-à-dire $|\zeta| < \rho^*$, correspondent aux deux cylindres qui traversent \mathcal{R} d'une sphère limite à l'autre tout en restant dans le même hémisphère ; le nord si le segment hyperbolique va de $\eta - \xi = +c$ à $\eta - \xi = -c$ et le sud dans l'autre cas.

Puisque ces orbites transitent d'une région à une autre, nous les appellerons orbites de **transit**. Ce sont les deux orbites rouges dans la figure 2.1.

- (4) Enfin, les segments hyperboliques déterminés par $\eta\xi = \text{cste} < 0$, c'est-à-dire $|\zeta| > \rho^*$, correspondent aux deux cylindres d'orbites dans \mathcal{R} qui vont d'un hémisphère à l'autre en restant sur la même sphère limite.

Donc, si $\xi > 0$, on doit avoir $\eta < 0$ et la sphère est alors n_1 , puisqu'elle est déterminée par $\eta - \xi = -c$. Les orbites vont alors du sud vers le nord (figure 2.1).

Si $\xi < 0$, la sphère sur laquelle les orbites ont leur extrémités est n_2 .

Puisque ces orbites restent dans la même région, nous les appellerons des orbites de **non-transit**.

2.2.6 La représentation de McGehee

Les auteurs de l'article de base de ce mémoire font référence à la représentation de McGehee (publiée dans sa thèse de doctorat en 1969). Dans le paragraphe qui suit, nous avons développé et vérifié le court résumé qu'ils en faisaient.

McGehee (1969) a donc proposé une représentation qui facilite la visualisation de la région \mathcal{R} . Rappelons que \mathcal{R} est homéomorphe au produit d'une sphère et d'un intervalle (voir section 2.2.4). Dans la formulation de McGehee, on la représente par un anneau sphérique, comme montré dans la figure 2.3(b).

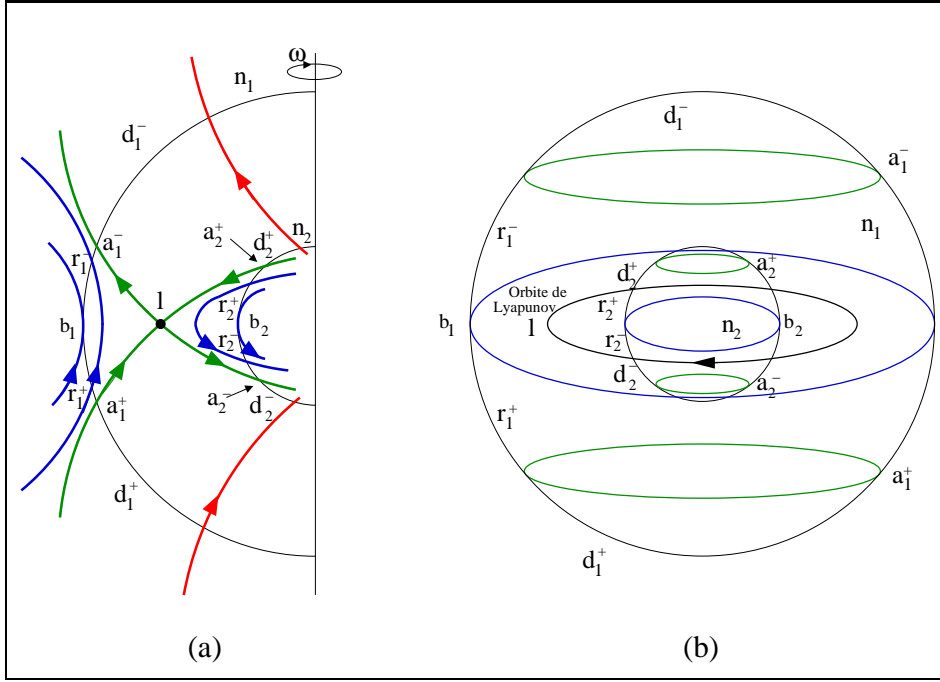


FIG. 2.3 – Représentation de McGehee

La figure 2.3(a) est une surface de section de la région \mathcal{R} dans le plan $(\zeta_1, \eta + \xi)$. Nous pouvons noter que, qualitativement, la figure 2.3(a) est la même que la figure 2.1. L'anneau sphérique de la figure 2.3(b) (cette fois dans l'espace $(\zeta_1, \zeta_2, \eta + \xi)$) est obtenu en faisant tourner la surface de section autour de l'axe ω indiqué sur la partie (a).

Les classifications suivantes correspondent aux quatre catégories de la partie précédente.

- (1) Il y a une orbite **périodique** instable l (orbite de **Lyapunov**) dans la région \mathcal{R} , c'est l'orbite noire sur la figure.
- (2) Soient n_1 et n_2 les deux sphères limites et utilisons n pour en désigner une des deux.

Nous pouvons séparer n en deux parties : n^+ là où le flot entre dans \mathcal{R} et n^- là où il quitte \mathcal{R} . Nous aurons par exemple que n_1^+ est l'hémisphère sud tandis que n_2^- est l'hémisphère nord.

Soient maintenant a^+ et a^- , les intersections de n avec les cylindres d'orbites **asymptotiques** à l'orbite périodique **1**, le '+' et '-' de a correspondant toujours à l'endroit où le flot entre et quitte \mathcal{R} respectivement.

Nous voyons que a^+ et a^- correspondent à des cercles sur n^+ et n^- .

- (3) Nommons d^+ les calottes sphériques de n_1^+ et de n_2^+ , bornées par a^+ , et d^- celles de n_1^- et de n_2^- (voir figure 2.4). Nous remarquons que les orbites de **transit** qui entrent dans \mathcal{R} par d^+ sortent par d^- sur l'autre sphère limite. Similairement, les orbites qui quittent \mathcal{R} en passant par d^- proviennent du d^+ de l'autre sphère.

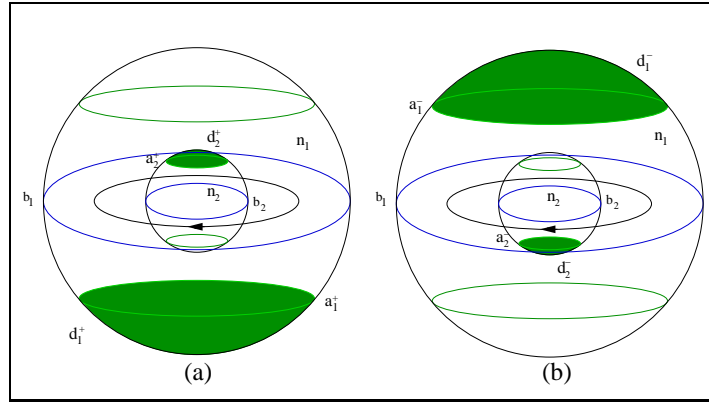


FIG. 2.4 – (a) Visualisation des calottes d_1^+ et d_2^+ . (b) Les calottes d_1^- et d_2^- .

- (4) Notons b l'intersection de n^+ et n^- . Nous pouvons voir que c'est en fait un cercle de points tangents à \mathcal{R} . Les orbites tangentes à ce cercle “rebondissent”, elles n'entrent pas dans \mathcal{R} , mais la touchent puis repartent.

De plus, si nous appelons r^+ la zone bornée par a^+ et b , et r^- la zone bornée par a^- et b , on voit que les orbites de **non-transit** entrent dans \mathcal{R} par r^+ et sortent sur la même sphère par r^- .

L'observation-clé ici est de remarquer que les “**tubes**” d'orbites **asymptotiques séparent** deux types de mouvements bien distincts : les orbites de transit et celles de non-transit.

Les **orbites de transit**, passant d'une région à une autre, sont celles **à l'intérieur du tube** cylindrique d'orbites, tandis que les **orbites de non-transit**, qui retournent dans leur région d'origine, sont celles **à l'extérieur de ces tubes**.

2.3 Orbites dans l'espace des positions (x, y)

Après avoir étudié la structure des orbites dans la région d'équilibre \mathcal{R} sur le plan (η, ξ) , nous allons l'examiner dans l'espace des positions (x, y) .

Rappelons que les axes de coordonnées ξ et η sont les vecteurs propres $u_1 = (1 \ -\sigma \ \lambda \ -\lambda\sigma)^t$ et $u_2 = (1 \ \sigma \ -\lambda \ -\lambda\sigma)^t$ respectivement. Leurs projections sur le plan (x, y) sont donc $\bar{u}_1 = (1 \ -\sigma)^t$ et $\bar{u}_2 = (1 \ \sigma)^t$. Elles jouent un rôle important dans l'étude de l'apparence des orbites sur l'espace des positions.

Nous allons chercher à représenter les projections de différents types d'orbites sur le plan (x, y) . Pour cela, rappelons que les valeurs propres du système linéarisé (2.7) sont $\pm\lambda$ et $\pm i\nu$, et les vecteurs propres qui leur correspondent sont u_1, u_2, w_1, w_2 , où u_1 et u_2 sont définis plus haut et $w_1 = (1 \ -i\tau \ i\nu \ \nu\tau)^t$ et $w_2 = (1 \ i\tau \ -i\nu \ \nu\tau)^t$. La solution générale est donc :

$$\begin{aligned} S(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda t} u_1 + \alpha_2 e^{-\lambda t} u_2 + \gamma_1 e^{i\nu t} w_1 + \gamma_2 e^{-i\nu t} w_2 \\ &= \alpha_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma \\ \lambda \\ -\lambda\sigma \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \\ -\lambda \\ -\lambda\sigma \end{pmatrix} + \gamma_1 e^{i\nu t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\tau \\ i\nu \\ \nu\tau \end{pmatrix} + \gamma_2 e^{-i\nu t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\tau \\ -i\nu \\ \nu\tau \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$.

Sélectionnons les solutions réelles de (2.17). Les deux premiers termes de la somme sont réels, nous choisirons donc $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Analysons maintenant les deux derniers termes :

$$\gamma_1 e^{i\nu t} w_1 + \gamma_2 e^{-i\nu t} w_2 = \gamma_1 e^{i\nu t} w_1 + \gamma_2 \overline{e^{i\nu t} w_1} \quad (2.18)$$

où \bar{z} dénote le complexe conjugué de z .

Nous aurons que l'expression (3.8) sera réelle si :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \overline{\gamma_1} \\ \leadsto \gamma_1 &= \beta_1 + i\beta_2 = \beta \\ \gamma_2 &= \beta_1 - i\beta_2. \end{aligned}$$

L'équation (2.17) devient alors :

$$\begin{aligned} S(t) &= \alpha_1 e^{\lambda t} u_1 + \alpha_2 e^{-\lambda t} u_2 + \gamma_1 e^{i\nu t} w_1 + \overline{\gamma_1 e^{i\nu t} w_1} \\ &= \alpha_1 e^{\lambda t} u_1 + \alpha_2 e^{-\lambda t} u_2 + 2\operatorname{Re}(\beta e^{i\nu t} w_1) \end{aligned}$$

où $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont maintenant des constantes réelles.

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 e^{-\lambda t} + 2(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \sin \nu t) \\ y(t) = -\alpha_1 \sigma e^{\lambda t} + \alpha_2 \sigma e^{-\lambda t} + 2\tau(\beta_1 \sin \nu t + \beta_2 \cos \nu t) \\ v_x(t) = \alpha_1 \lambda e^{\lambda t} - \alpha_2 \lambda e^{-\lambda t} - 2\nu(\beta_1 \sin \nu t + \beta_2 \cos \nu t) \\ v_y(t) = -\alpha_1 \lambda \sigma e^{\lambda t} - \alpha_2 \lambda \sigma e^{-\lambda t} + 2\nu\tau(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \sin \nu t). \end{cases} \quad (2.19)$$

Nous allons voir que l'apparence des orbites dépendra du comportement limite de $x(t)$, t tendant vers $\pm\infty$ et que l'on retrouvera les quatre catégories des sections précédentes.

D'après (2.19), nous avons :

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 e^{-\lambda t} + 2(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \sin \nu t). \quad (2.20)$$

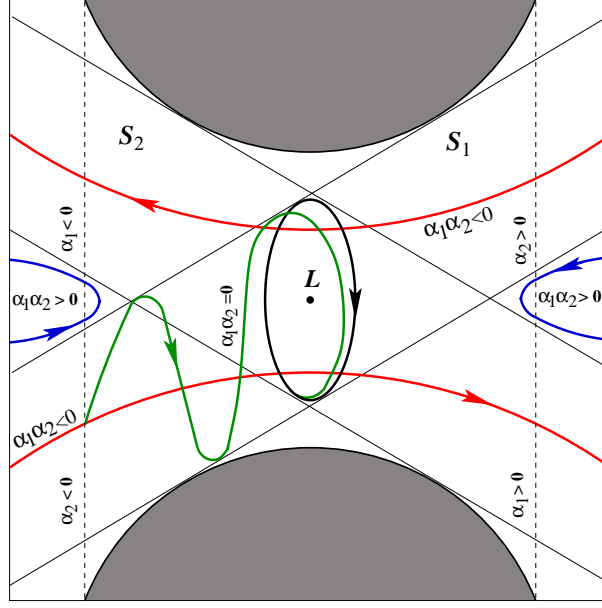
- Choisissons d'abord le cas où $t \rightarrow +\infty$. Nous voyons que (2.20) est dominé par son terme en α_1 . Nous aurons donc trois cas possibles suivant le signe de α_1 (voir figure 2.5) :
 - Si $\alpha_1 < 0$, $x(t) \rightarrow -\infty$, la comète reste donc du côté gauche.
 - Si $\alpha_1 = 0$, $x(t)$ est borné et la comète reste autour du point d'équilibre.
 - Si $\alpha_1 > 0$, $x(t) \rightarrow +\infty$ et la comète reste du côté droit.
- Les mêmes observations tiennent si $t \rightarrow -\infty$ et si α_2 remplace α_1 .

Nous allons maintenant montrer que différentes combinaisons des signes de α_1 et α_2 vont de nouveau nous donner les quatre catégories d'orbites des paragraphes précédents :

- (1) Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, nous obtenons une solution périodique qui est l'orbite de *Lyapunov*. Sa projection sur le plan (x, y) est une ellipse. En effet, reprenons (2.19) avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \sin \nu t) \\ y(t) = 2\tau(\beta_1 \sin \nu t + \beta_2 \cos \nu t) \\ v_x(t) = -2\nu(\beta_1 \sin \nu t + \beta_2 \cos \nu t) \\ v_y(t) = 2\nu\tau(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \sin \nu t). \end{cases} \quad (2.21)$$

Posons maintenant $\beta_1 = S \cos \phi$ et $\beta_2 = S \sin \phi$, où S et ϕ sont des constantes réelles.

FIG. 2.5 – Flot dans l'espace (x, y)

Les équations (2.21) deviennent alors :

$$\begin{cases} x(t) = 2S \cos(\nu t + \phi) \\ y(t) = 2S\tau \sin(\nu t + \phi) \\ v_x(t) = -2S\nu \sin(\nu t + \phi) \\ v_y(t) = 2S\nu\tau \cos(\nu t + \phi). \end{cases} \quad (2.22)$$

Nous voyons que :

$$\frac{x^2(t)}{4S^2} + \frac{y^2(t)}{4S^2\tau^2} = \frac{4S^2 \cos^2(\nu t + \phi)}{4S^2} + \frac{4S^2\tau^2 \sin^2(\nu t + \phi)}{4S^2\tau^2} = 1,$$

ce qui est bien l'équation d'une ellipse dont les deux axes sont de longueur $2S$ et $2S\tau$.

Il reste à trouver une expression de S grâce à l'intégrale d'énergie. Reprenons (2.6) et transformons-la grâce à (2.21) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 - ax^2 + by^2) \\ &= 2S^2(\nu^2 \sin^2(\nu t + \phi) + \nu^2\tau^2 \cos^2(\nu t + \phi) \\ &\quad - a \cos^2(\nu t + \phi) + b\tau^2 \sin^2(\nu t + \phi)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Choisissons t tel que $\cos^2(\nu t + \phi) = \sin^2(\nu t + \phi) = 1/2$, c'est-à-dire $\nu t + \phi = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, ou encore $t = (2k+1)\frac{\pi}{4\nu} - \frac{\phi}{\nu}$.

De cette façon, (2.23) devient :

$$\mathcal{E} = S^2(\nu^2 + \nu^2\tau^2 - a + b\tau^2)$$

où nous poserons $\kappa = \nu^2 + \nu^2\tau^2 - a + b\tau^2$ et donc :

$$S = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\kappa}}.$$

Nous avons choisi la solution positive de S pour que la longueur des axes de l'ellipse ($2\sqrt{\mathcal{E}/\kappa}$ et $2\tau\sqrt{\mathcal{E}/\kappa}$) soit positive.

Notons que la taille de l'ellipse tend vers 0 avec \mathcal{E} . En effet, quand la constante de Jacobi tend vers celle d'un point d'équilibre ($C \rightarrow C_i$), nous avons alors que $\mathcal{H}_l = \mathcal{E} = \frac{1}{2}(-a(x-k)^2 + by^2) \rightarrow 0$ puisque $x-k$ et y tendent vers 0 quand on approche du point d'équilibre dont les coordonnées sont $(k, 0)$.

(2) Traitons maintenant le cas où $\alpha_1\alpha_2 = 0$. Nous avons alors des orbites *asymptotiques* à l'orbite de Lyapunov.

- Si $\alpha_1 = 0$, montrons que les orbites sont projetées dans le plan (x, y) sur une bande S_1 bornée par les droites $y = \sigma x \pm 2\sqrt{\mathcal{E}(\sigma^2 + \tau^2)/\kappa}$.

Si nous reprenons (2.19) avec $\alpha_1 = 0$ et en ayant déjà fait $\beta_1 = S \cos \phi$ et $\beta_2 = S \sin \phi$, nous obtenons :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_2 e^{-\lambda t} + 2S \cos(\nu t + \phi) \\ y(t) = \alpha_2 \sigma e^{-\lambda t} + 2S\tau \sin(\nu t + \phi) \\ v_x(t) = -\alpha_2 \lambda e^{-\lambda t} - 2\nu(\beta_1 \sin \nu t + \beta_2 \cos \nu t) \\ v_y(t) = -\alpha_2 \lambda \sigma e^{-\lambda t} + 2\nu\tau(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \sin \nu t) \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow y - \sigma x = 2S[\tau \sin(\nu t + \phi) - \sigma \cos(\nu t + \phi)] \quad (2.25)$$

Posons $\tau = R \cos \psi$ et $\sigma = R \sin \psi$. On a donc $R^2 = \sigma^2 + \tau^2$. L'équation (2.25) devient :

$$\begin{aligned} y &= \sigma x + 2S\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} [\cos \psi \sin(\nu t + \phi) - \sin \psi \cos(\nu t + \phi)] \\ &= \sigma x + 2S\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \sin(\nu t + \phi - \psi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Rappelons que nous nous intéressons à la région d'équilibre. Les orbites asymptotiques ne s'en approcheront que pour des temps assez longs, c'est-à-dire, $t \rightarrow +\infty$. Les termes de (2.24) en $e^{-\lambda t}$ s'annuleront donc. Le calcul sera alors le même que dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et nous aurons que $S = \sqrt{\mathcal{E}/\kappa}$.

En reprenant l'équation (2.26) et en remarquant que le terme en sinus est compris entre -1 et 1 , on déduit bien que les orbites sont comprises entre deux droites d'équation :

$$y = \sigma x \pm 2\sqrt{\mathcal{E}(\sigma^2 + \tau^2)/\kappa}.$$

Pour terminer, signalons que nous avons à faire à des orbites asymptotiques stables, c'est-à-dire qui tendent vers l'orbite de Lyapunov quand $t \rightarrow +\infty$, puisque le terme en $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

- Le cas où $\alpha_2 = 0$ se traite de façon similaire et les orbites asymptotiques sont projetées dans le plan (x, y) sur une bande S_2 bornée par les droites $y = -\sigma x \pm 2\sqrt{\mathcal{E}(\sigma^2 + \tau^2)/\kappa}$.

Dans ce cas, nous aurons des orbites asymptotiques instables, c'est-à-dire qui tendent vers l'orbite de Lyapunov quand $t \rightarrow -\infty$.

(3) Analysons maintenant le cas où $\alpha_1\alpha_2 < 0$. Reprenons (2.19) :

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 e^{-\lambda t} + 2(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \cos \nu t) \\ y(t) &= -\alpha_1 \sigma e^{\lambda t} + \alpha_2 \sigma e^{-\lambda t} + 2\tau(\beta_1 \sin \nu t + \beta_2 \cos \nu t). \end{aligned}$$

- $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$

On voit aisément que quand $t \rightarrow +\infty$, $x(t) \rightarrow +\infty$, tandis que si $t \rightarrow -\infty$, on a $x(t) \rightarrow -\infty$. Quant à $y(t)$, on voit qu'il tendra vers $-\infty$, que t tende vers $+\infty$ ou $-\infty$. Les orbites voyagent donc bien de la partie gauche du graphe 2.5 vers la partie droite et se trouvent bien à l'endroit indiqué. Ce sont donc effectivement des orbites de *transit*.

- $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$

Dans ce cas, les orbites circuleront simplement dans le sens inverse mais nous aurons toujours des orbites de transit.

(4) Il nous reste le cas où $\alpha_1\alpha_2 > 0$.

Supposons que α_1 et α_2 soient positifs. Si $t \rightarrow +\infty$, alors $x(t) \rightarrow +\infty$, mais si $t \rightarrow -\infty$, nous avons encore que $x(t) \rightarrow +\infty$. Quand $t \rightarrow +\infty$, alors $y(t) \rightarrow -\infty$ et quand $t \rightarrow -\infty$, $y(t) \rightarrow +\infty$. Nous voyons que les orbites restent toujours du côté droit et évoluent comme indiqué sur le graphe 2.5. Ce sont donc des orbites de *non-transit*.

Quand α_1 et α_2 sont négatifs, les orbites restent du côté gauche et nous avons toujours des orbites de non-transit.

Nous allons maintenant étudier ces deux dernières catégories d'orbites.

Grâce au signe de $\alpha_1\alpha_2$, nous pouvons déterminer si les orbites sont de transit ou de non-transit. Mais cela ne nous montre pas où elles se situent dans le plan (x, y) .

Nous nous contenterons simplement d'indiquer certaines observations de Conley(1968) pour ce paragraphe.

Dans la figure 2.5, S_1 et S_2 sont les deux bandes mentionnées plus tôt. En dehors de ces bandes, les signes de α_1 et de α_2 sont indépendants de la direction de la vitesse. Par exemple, dans la partie la plus à gauche sur le graphe 2.5, α_1 et α_2 sont tous les deux négatifs, tandis que dans la partie droite, ils sont positifs. Par conséquent, $\alpha_1\alpha_2 > 0$ et nous avons donc des orbites de non-transit.

A l'intérieur des deux bandes, il faut calculer l' "angle" des vitesses en chacun des points. Une étude détaillée de ces angles n'étant pas le but de ce travail, nous ne ferons que les définir brièvement et expliquer le moyen de les trouver.

L'angle des vitesses est en fait un croisement de deux droites dans l'espace (v_x, v_y) asso-

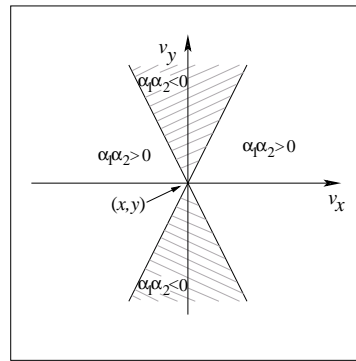


FIG. 2.6 – A chaque point (x, y) correspond un "plan" de vitesses. Dans ce plan, on peut déterminer l'angle des vitesses pour lequel le produit $\alpha_1\alpha_2$ est négatif (zone hachurée).

cié à chaque point (x, y) dans S_1 ou S_2 . Nous aurons que pour n'importe quelle vitesse se trouvant à l'intérieur de ce croisement, le produit $\alpha_1\alpha_2$ sera négatif, comme illustré sur la figure 2.6.

Ainsi, les orbites dont la vitesse est à l'intérieur de cet angle seront des orbites de transit. Les orbites dont la vitesse est à l'extérieur ($\alpha_1\alpha_2 > 0$) seront des orbites de non-transit, et celles dont la vitesse se trouve sur la borne ($\alpha_1\alpha_2 = 0$) seront bien entendu des orbites asymptotiques.

Terminons ce chapitre par une observation importante. Si nous avons une orbite de non-transit, sa position dans le plan (x, y) à un temps t est donnée par (2.19) :

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 e^{-\lambda t} + 2 \underbrace{(\beta_1 \cos \nu t - \beta_2 \cos \nu t)}_{=S \cos(\nu t + \phi)} \\ y(t) &= -\alpha_1 \sigma e^{\lambda t} + \alpha_2 \sigma e^{-\lambda t} + 2\tau \underbrace{(\beta_1 \sin \nu t + \beta_2 \cos \nu t)}_{S \sin(\nu t + \phi)}, \end{aligned}$$

où nous posons $\beta_1 = S \cos \phi$, $\beta_2 = S \sin \phi$, et où α_1 et α_2 sont positifs.

Supposons maintenant que l'on ait une orbite proche du cylindre d'orbites asymptotiques stables. Dans ce cas, d'une part α_1 est proche de 0 et d'autre part, après un temps t_1 relativement long elle se rapproche de la région d'équilibre.

Nous assurons que : $\exists \alpha_1 > 0, \exists t_1, t_2 > 0 : \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \forall \alpha_2 > \epsilon_2 \forall t \in]t_2, t_1[$,

$$\begin{cases} \alpha_1 e^{\lambda t} < \epsilon_1 \\ \alpha_2 e^{-\lambda t} < \epsilon_2. \end{cases} \quad (2.27)$$

Preuve :

Calculons tout d'abord la borne t_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_2 e^{-\lambda t} < \epsilon_2 &\Leftrightarrow t > -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \\ \Rightarrow t_2 &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} \end{aligned}$$

Comme $\alpha_2 > \epsilon_2$, $\ln(\alpha_2/\epsilon_2) > 0$ et nous avons bien que $t_2 > 0$.

Calculons maintenant t_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 e^{\lambda t} < \epsilon_1 &\Leftrightarrow t < \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \end{aligned}$$

La condition 2.27 est donc assurée si $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} < t < \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon_1}{\alpha_1}$.

Il reste alors à mettre une condition sur α_1 pour que $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} < \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon_1}{\alpha_1}$. Cette condition est :

$$\frac{\alpha_2}{\epsilon_2} < \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{i.e.,} \quad \alpha_1 < \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\alpha_2}$$

Par conséquent, la condition 2.27 est assurée si

$$\begin{aligned} \cdot t_1 &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \\ \cdot t_2 &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\alpha_2}{\epsilon_2} \\ \cdot \alpha_1 &< \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

□

Donc, quand ϵ_1 et ϵ_2 sont petits, pour $t \in]t_2, t_1[$ et pour un α_1 satisfaisant la condition citée plus haut, $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement dominés par leurs termes en cosinus et sinus.

Nous avons alors quelques conclusions à en tirer :

1. Pendant un certain laps de temps, l'orbite va tourner dans le plan (x, y) en épousant le contour de l'orbite de Lyapunov.
2. L'orbite ne va pas tourner indéfiniment dans le plan (x, y) le long de l'orbite de Lyapunov. En effet, quand $t > t_1$, le terme $\alpha_1 e^{\lambda t}$ ne sera plus négligeable. Nous aurons donc qu'à partir de ce t_1 , l'orbite cessera de tourner autour de l'orbite périodique et quittera la région d'équilibre.
3. Notons que ce t_1 dépendra du choix de α_1 : *Plus α_1 sera proche de 0 (et donc plus l'orbite choisie sera proche du cylindre d'orbites asymptotiques), plus l'orbite tournera longtemps dans la région d'équilibre.*

Cette dernière conclusion nous sera très utile dans la suite.

Remarque : Si α_1 et α_2 avaient été tous deux négatifs ou si nous avions eu à faire à une orbite de transit, des calculs similaires nous auraient menés aux mêmes conclusions.

Chapitre 3

Orbites homocliniques du PPCR3C

Préambule

Comme mentionné plus tôt, près du point d'équilibre L (i.e. L_1 ou L_2), il existe une orbite périodique instable appelée l' "orbite de Lyapunov".

Pour comprendre complètement les mouvements du flot, on examine des structures telles que les orbites homocliniques et les connexions hétérocliniques relatives aux orbites de Lyapunov de L_1 et de L_2 (que nous noterons \overline{L}_1 et \overline{L}_2).

Définissons maintenant *variétés invariantes stable et instable, orbite homoclinique et connexion hétéroclinique* :

- Une variété invariante stable (instable) relative à L ou \overline{L} est l'ensemble des points (x, y, \dot{x}, \dot{y}) tels que toute trajectoire passant par un de ces points tende vers L ou \overline{L} quand $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$).
- Une orbite homoclinique, relative à un point d'équilibre L ou à une orbite périodique \overline{L} , est une orbite qui tend vers L ou \overline{L} quand $t \rightarrow \pm\infty$. Par conséquent, elle se trouve sur les variétés stable et instable de l'objet considéré (L ou \overline{L}).
- Une connexion ou orbite hétéroclinique entre deux orbites périodiques est une orbite se trouvant à la fois sur la variété stable d'une des orbites périodiques et sur la variété instable de l'autre. Elle passe donc par **l'intersection** des variétés stable et instable des deux orbites.

Formulons quelques remarques à propos des variétés invariantes :

- Dans notre problème, L possède une valeur propre réelle négative et une autre réelle positive (section 2.2.1). Nous aurons donc bien des variétés invariantes stables et instables.
- Du travail de Conley (1968), nous savons que d'un côté, L possède des variétés

invariantes stables et instables à **1** dimension. D'autre part, \overline{L} possède des variétés invariantes stables et instables à **2** dimensions qui sont localement difféomorphes à des cylindres.

- Une dernière remarque importante est que les variétés invariantes de \overline{L} correspondent aux tubes d'orbites asymptotiques à \overline{L} .

Nous avons vu que la structure **locale** des orbites près des points de libration L_1 et L_2 nous donne des orbites périodiques (celles de Lyapunov), des morceaux de variétés stables et instables de ces orbites périodiques (les orbites asymptotiques), des orbites de transit (si elles sont à l'intérieur des "tubes" de variétés) et des orbites de non-transit (si elles sont à l'extérieur).

Dans ce chapitre et dans le suivant, nous verrons comment ces structures locales sont connectées globalement.

Dans un premier temps, nous allons étudier l'existence des orbites homocliniques et la transversalité des variétés stables et instables de \overline{L}_1 et \overline{L}_2 .

Voici un bref aperçu des différentes parties du chapitre :

- * Dans la première partie, nous allons nous baser sur des résultats de Conley(1968) et McGehee (1969) pour montrer l'existence d'orbites homocliniques dans les régions intérieure et extérieure.
- * Dans la seconde partie, nous utiliserons des résultats du groupe barcelonais Llibre, Martinez et Simó (que l'on notera LMS) (1985) qui montrent la transversalité des variétés pour \overline{L}_1 (c'est-à-dire dans la région intérieure).

Nous savons déjà qu'une orbite homoclinique de \overline{L}_1 se situe à la fois sur ses variétés stable et instable. Une question importante qui se pose est la transversalité de l'intersection. Llibre, Martinez et Simó (1985) ont donc montré que, sous certaines conditions appropriées, nous avons bien la transversalité.

- * Enfin, dans la dernière partie, nous reprendrons les résultats de Koon *et al.* qui se sont eux-mêmes inspirés du travail d'un autre groupe de Barcelone, Gómez, Jorba, Masdemont and Simó (1991). Koon *et al.* montrent donc semi-analytiquement qu'il existe des orbites homocliniques transversales à la fois dans la région intérieure et extérieure.

3.1 Existence d'orbites homocliniques

3.1.1 Les théorèmes de McGehee

Pour prouver l'existence d'orbites homocliniques, nous aurons besoin de deux théorèmes de McGehee (1969), l'un concernant la région intérieure (**I**) et l'autre la région extérieure (**X**).

Nous devons préciser quelques points avant de pouvoir énoncer les théorèmes.

Rappelons d'abord les définitions de la surface d'énergie :

$$\mathcal{M}(\mu, C) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) | C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \text{constante}\}$$

et de la région de Hill :

$$M(\mu, C) = \{(x, y) | \Omega(x, y) \geq C/2\}.$$

Une contribution importante de McGehee (1969) est de montrer que la surface d'énergie est divisée en plusieurs parties, du fait de la présence d'un tore invariant ; ce mécanisme existe pour des valeurs de C et de μ compatibles avec celles qui nous intéressent :

- $C_2 > C > C_3$
- μ de l'ordre des rapports de masses de notre Système Solaire.

Pour certaines conditions initiales, on constate que la trajectoire va se déplacer dans une structure complexe ; elle peut tourner autour du Soleil, traverser la région de Jupiter, tourner dans la région extérieure, sans jamais toutefois ni toucher le Soleil, ni s'éloigner définitivement du système Soleil-Jupiter.

C'est ce que nous appelons la variété ou le tore de McGehee. Jupiter se trouve évidemment à l'intérieur de ce tore ; le Soleil, par contre, n'en fait pas partie.

C'est pourquoi nous pouvons dire que l'existence de ce tore nous garantit qu'aucune comète ne peut passer d'un corps à l'autre. D'autre part, comme les trajectoires de ce tore ne filent pas à l'infini, nous pouvons également dire que ce tore sépare nos deux corps de l'infini.

Remarque :

Nous pensons cependant que les auteurs de notre article de référence ont fait planer (probablement involontairement) une incertitude sur ce tore ; la représentation qu'ils en donnent est projetée schématiquement sur le plan (x, y) par deux gros anneaux concentriques.

A la première lecture de l'article, nous avons pensé que ces tores invariants se rattachaient à la théorie des tores KAM, pour un paramètre μ suffisamment petit. En effet,

si $\mu=0$, les trajectoires sont toutes sur des tores invariants. Pour μ suffisamment petit, le théorème KAM nous assure que certains de ces tores subsistent et déterminent des zones infranchissables dans l'espace de phase.

Nous avons cependant constaté que ces tores n'existaient que pour des valeurs de C bien plus hautes (et donc des valeurs d'énergie plus basses) que celles qui nous intéressent. Par contre, la variété ("tore") de McGehee est bien présente pour $C_2 > C > C_3$. Notre intégration numérique nous a en effet permis de trouver des conditions initiales correspondant à des trajectoires se situant sur cette structure.

Nous allons maintenant diviser la région de Hill et la surface d'énergie en cinq parties. Pour μ petit, nous savons que les deux équilibres L_1 et L_2 se situent de chaque côté de Jupiter à une distance α (voir 1.16), où

$$\alpha = \left(\frac{\mu}{3(1-\mu)} \right)^{1/3}.$$

Nous isolons ces points en dessinant des droites de part et d'autre de chaque point d'équilibre, c'est-à-dire que nous traçons des droites verticales passant par les points $(1 - \mu \pm c_1\alpha, 0)$ et $(1 - \mu \pm b_1\alpha, 0)$ où $b_1 < 1 < c_1$.

Ces droites déterminent alors deux régions :

$$R_1(\mu, C, b_1, c_1) = \{(x, y) | \Omega(x, y) \geq C/2 \text{ et } 1 - \mu - c_1\alpha \leq x \leq 1 - \mu - b_1\alpha\}$$

$$R_2(\mu, C, b_1, c_1) = \{(x, y) | \Omega(x, y) \geq C/2 \text{ et } 1 - \mu + c_1\alpha \leq x \leq 1 - \mu + b_1\alpha\}$$

Les cinq parties de la région de Hill sont donc (voir figure 3.1) :

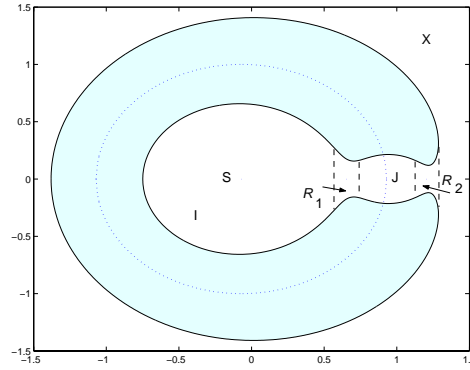


FIG. 3.1 – Séparation de la région de Hill en cinq zones : I, J, X, R_1 et R_2 .

- S, la région intérieure qui contient le Soleil
- J, la région qui contient Jupiter
- X, la région extérieure à l'orbite de Jupiter
- R_1 et
- R_2 , définies plus haut.

Nous disposons maintenant de suffisamment d'éléments pour pouvoir énoncer les théorèmes de McGehee.

Ces théorèmes montrent que toutes les orbites quittant le voisinage d'une des orbites périodiques instables poursuivent leurs trajectoires autour de l'anneau T_1 et T_2 avant de revenir vers ce voisinage.

Les orbites ont toutes les mêmes directions, c'est-à-dire qu'elles évoluent dans le sens anti-horloger dans la région intérieure et dans le sens horloger dans la région extérieure. Voici ces théorèmes :

Théorème 3.1.1 *Il existe des constantes b_1 et c_1 et un ensemble ouvert O_1 qui appartient au plan (μ, C) et qui contient le graphe de $C = C_1(\mu)$ tel que, pour $(\mu, C) \in O_1$, nous avons :*

1. *La surface d'énergie $\mathcal{M}(\mu, C)$ contient un tore invariant séparant le Soleil de Jupiter.*
2. *Pour $C < C_1(\mu)$, le flot dans $\mathcal{R}_1(\mu, C)$ est qualitativement le même que le flot pour les équations linéarisées (voir figure 2.3).*
3. *Soit \mathcal{T}_1 la sous-variété de \mathcal{M} bornée par le tore invariant et n_1 (figure 3.2), alors il existe une fonction $\theta : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*
 - (a) *θ est une coordonnée angulaire méridionale pour \mathcal{T}_1 ;*
 - (b) *θ est strictement croissant le long des orbites.*

Théorème 3.1.2 *Il existe des constantes b_1 et c_1 et un ensemble ouvert O_2 qui appartient au plan (μ, C) et qui contient le graphe de $C = C_2(\mu)$ tel que, pour $(\mu, C) \in O_2$, nous avons :*

1. *La surface d'énergie $\mathcal{M}(\mu, C)$ contient un tore invariant séparant le Soleil et Jupiter de l'infini.*
2. *Pour $C < C_2(\mu)$, le flot dans $\mathcal{R}_2(\mu, C)$ est qualitativement le même que le flot pour les équations linéarisées (voir figure 2.3).*
3. *Soit \mathcal{T}_2 la sous-variété de \mathcal{M} bornée par le tore invariant et n_1 , alors il existe une fonction $\theta : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*
 - (a) *θ est une coordonnée angulaire méridionale pour \mathcal{T}_2 ;*
 - (b) *θ est strictement croissant le long des orbites.*

Brève explication des théorèmes :

- Nous savons que si b_1 et c_1 sont proches de 1, c'est-à-dire si la région \mathcal{R} (\mathcal{R}_1 ou \mathcal{R}_2) est proche de l'orbite périodique, le flot est celui analysé dans la section 2.2.6 et est schématisé sur la figure 2.3.
- Nous ne pouvons pas choisir c_1 arbitrairement grand sans perdre l'image du flot de la figure 2.3. D'un autre côté, nous voudrions le choisir assez grand pour obtenir des estimations précises du comportement des orbites dans \mathcal{S} et \mathcal{X} .
- Ces théorèmes nous montrent donc que l'on peut choisir la division de la surface d'énergie décrite plus haut pour avoir un contrôle suffisant du flot dans \mathcal{S} et \mathcal{R} , ce qui nous permettra de construire une orbite homoclinique.
- Enfin le dernier point des théorèmes nous donne deux propriétés importantes de la région \mathcal{T} (\mathcal{T}_1 ou \mathcal{T}_2) pour la construction d'orbites homocliniques :
 - Puisque θ est une coordonnée angulaire, sa valeur le long de n'importe quel segment d'orbite dans \mathcal{T} dont les extrémités sont sur la sphère limite n_1 est proche d'un multiple entier non nul de 2π .
 - θ étant une fonction strictement croissante, si des orbites restent un temps arbitrairement long dans \mathcal{T} , alors θ deviendra arbitrairement grand. Cela implique que ces orbites deviendront elles aussi arbitrairement longues.

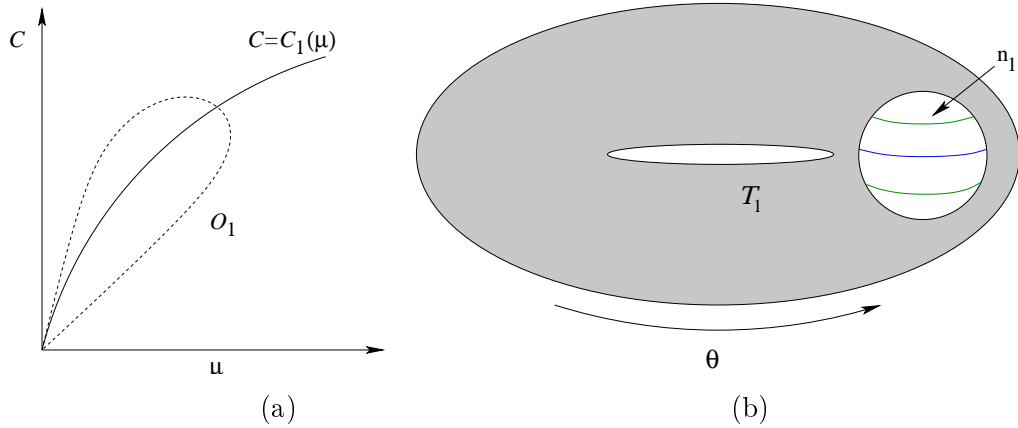


FIG. 3.2 – (a) Ouvert O_1 du premier théorème de McGehee dans le plan (μ, C) .
 (b) La sous-variété \mathcal{T}_1 avec la fonction θ .

3.1.2 Preuve de l'existence d'orbites homocliniques

Cette preuve a été réalisée par Conley et McGehee (1969) et est reprise très succinctement dans notre article de base. Nous en développerons les points importants.

Définissons d'abord la *dégénérescence totale*. La situation de dégénérescence totale se produit lorsque les variétés stable et instable de l'orbite de Lyapunov coïncident. Nous avons alors que chaque orbite asymptotique à l'orbite de Lyapunov à une extrémité est aussi asymptotique à l'autre extrémité.

Remarquons ensuite que durant toute la preuve, nous utiliserons la représentation de McGehee (figure 2.3). Notre but sera donc de prouver l'existence d'un segment d'orbite reliant a_1^- à a_1^+ , les cercles d'intersection entre la sphère limite n_1 et les cylindres d'orbites asymptotiques. Rappelons aussi que dans cette représentation, d_1^- et d_1^+ représentent les calottes sphériques de n_1 .

Enfin, nous utiliserons le théorème de récurrence de Poincaré, écrit à la fin de ce paragraphe. Pour l'appliquer à notre cas, puisque \mathcal{T}_1 est compact et que notre flot, qui est Hamiltonien, conserve le volume de phase, ce théorème nous affirme qu'après un certain temps, un point de n_1 emporté par le flot doit revenir vers sa région d'origine.

Preuve (pour la région intérieure) :

Nous soutenons que seules deux situations peuvent se produire :

- soit nous avons le cas de la dégénérescence totale ;
- soit il existe une orbite homoclinique.

Dans n'importe quelle situation, nous obtiendrons bien l'existence d'orbites homocliniques.

Tout d'abord, nous supposons que la dégénérescence totale ne se produit pas. La preuve est ensuite divisée en deux parties :

1. Il existe un segment d'orbite qui connecte d_1^- à a_1^+ ou a_1^- à d_1^+

Du théorème de récurrence de Poincaré (théorème 3.1.3), nous déduisons que si une orbite traverse \mathcal{R}_1 (et aussi la sphère limite n_1) et donc entre dans \mathcal{T}_1 , elle doit aussi quitter \mathcal{T}_1 et retraverser \mathcal{R}_1 (et n_1).

* Choisissons alors un point $p \in d_1^-$ dans n_1 . Il existe donc un segment d'orbite reliant p à un point $q \in d_1^+$ (voir figure 3.3(a)).

* Soit γ , un arc qui relie p à a_1^- . Deux cas sont alors envisagés :

- L'arc γ tout entier est transporté sur d_1^+ .
Nous obtenons alors un segment d'orbite connectant d_1^- à a_1^+ (voir figure 3.3(b)).
- Seul un sous-arc de γ est transporté sur d_1^+ .
Soit γ' ce sous-arc et soit r , le premier point de γ qui n'est pas transporté sur d_1^+ (voir figure 3.3(c)).

$$\left. \begin{array}{l} r \text{ n'est pas transporté sur } d_1^+ \\ r \in n_1, \text{ sphère qui borne } \mathcal{T}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{le segment d'orbite qui contient } r \text{ doit} \\ \text{rester un temps arbitrairement long dans } \mathcal{T}_1. \end{array}$$

Par le point 3(b) du théorème 3.1.1, ce segment d'orbite doit devenir arbitrairement long.

Cependant, par le théorème de récurrence de Poincaré, nous savons que cette orbite ne peut "tourner" qu'un nombre fini de fois dans \mathcal{T}_1 avant de retourner vers n_1 . Dès lors, la partie arbitrairement longue du segment d'orbite doit se trouver dans \mathcal{R}_1 . Et par notre connaissance du flot dans \mathcal{R}_1 (point 2 du théorème 3.1.1), les segments d'orbites ne sont arbitrairement longs que s'ils se trouvent très près des cylindres d'orbites asymptotiques. En effet, ils vont tourner un nombre indéfini de fois autour de n_1 en se rapprochant de plus en plus de a_1^- et deviendront alors arbitrairement longs.

Par conséquent, r doit être transporté sur a_1^+ .

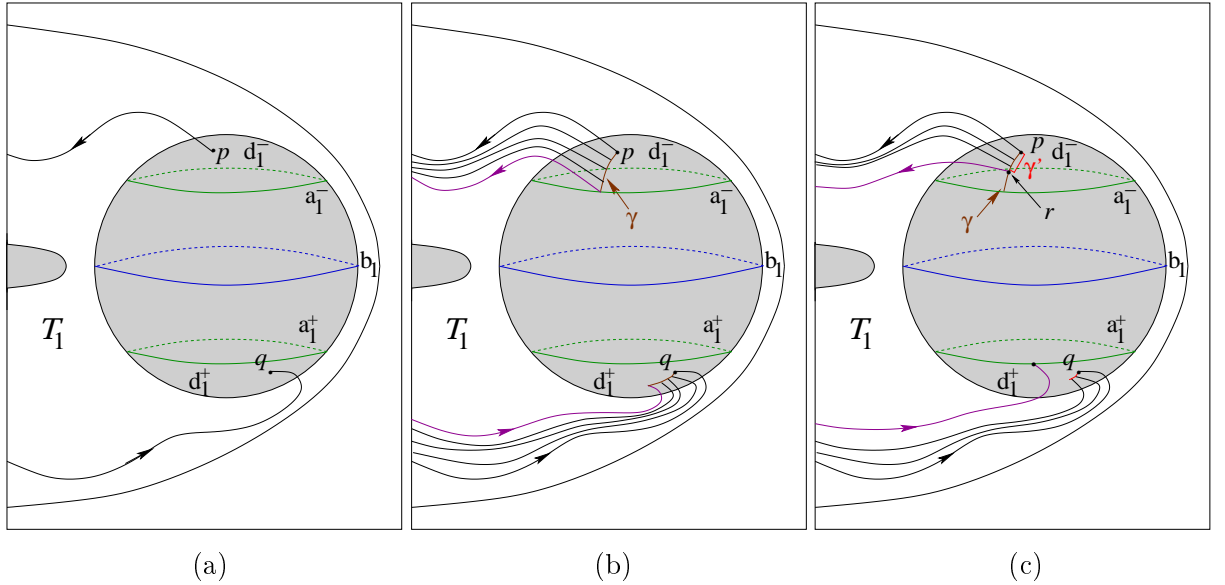


FIG. 3.3 – (a) Le segment d'orbite reliant p à q .

(b) L'arc γ entier transporté sur d_1^+ .

(c) γ' , la partie de γ transportée sur d_1^+ . Le premier point en dehors de γ' , r , est transporté sur a_1^+ .

2. Le segment d'orbite connecte a_1^- à a_1^+

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que nous avons un segment d'orbite avec une extrémité appelée $\alpha \in a_1^-$ et l'autre dans d_1^+ .

Nous choisissons à présent comme γ du point précédent l'ensemble a_1^- entier et nous utilisons un raisonnement similaire pour conclure que :

- ou $a_1^- (= \gamma)$ entier est transporté sur d_1^+ (figure 3.4(a))
- ou il existe un point $\beta \in a_1^-$ tel que le segment d'orbite dont une extrémité est β devient asymptotique à son autre extrémité (figure 3.4(b)).

Le premier cas est impossible. En effet, nous aurions que a_1^- entier serait transporté sur d_1^+ . Le volume ne serait alors plus conservé ce qui est impossible puisque notre flot est Hamiltonien (conservation du volume de phase).

Ainsi, nous obtenons un segment d'orbite homoclinique puisque $\beta \in a_1^-$ est transporté sur a_1^+ . \square

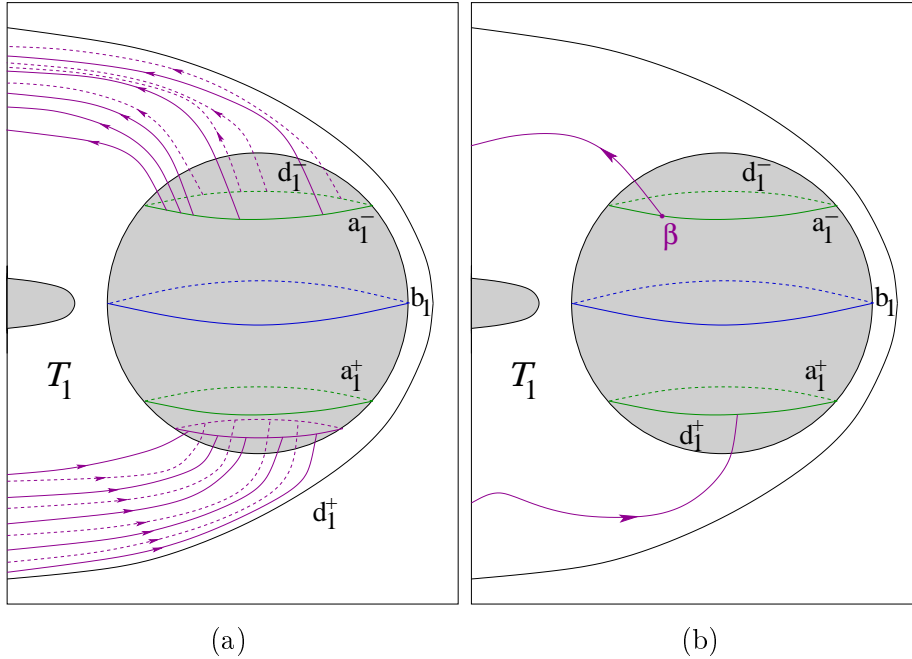


FIG. 3.4 – (a) a_1^- entier est transporté sur d_1^+ , mais cas impossible car non conservation du volume de phase d'un flot hamiltonien.

(b) Le segment d'orbite homoclinique avec son extrémité β sur a_1^- .

Nous terminerons ce paragraphe en remarquant que le même genre de preuve est utilisée pour montrer l'existence d'orbites homocliniques dans la région extérieure et en

écrivant l'énoncé complet du théorème de récurrence de Poincaré :

Théorème 3.1.3 *Soit (X, B, m) un espace de probabilité, T une application bijective de X dans X , telle que T et T^{-1} soient mesurables, et T préserve la mesure.*

Alors, pour tout A tel que $m(A) > 0$, pour presque tout x de A , il existe une suite croissante $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $T^{n_i}x \in A$.

3.2 L'existence d'orbites homocliniques transversales dans la région intérieure

Conley(1968) et McGehee (1969) n'ont pas soulevé la question de la transversalité des familles d'orbites homocliniques pour le PPCR3C. Par contre, le groupe barcelonais LMS (1985) a montré que, sous certaines conditions, les variétés stable et instable de l'orbite de Lyapunov \bar{L}_1 se croisent bien d'une manière transversale.

C'est un résultat important car il nous assure l'existence d'orbites de transit "double", c'est-à-dire qui transitent deux fois par \bar{L}_1 , une fois pour aller de la région de Jupiter (J) à la région intérieure (I) et l'autre fois de I à J. Nous avons vu dans le chapitre 2 que les orbites de transit se trouvaient à l'intérieur des tubes de variétés. Pour avoir une orbite de transit double, il faut donc que cette orbite se trouve à la fois à l'intérieur des tubes de variétés stable et instable de \bar{L}_1 . Or, si elles ne se croisent qu'en un point, il est impossible qu'une orbite puisse se trouver à l'intérieur des deux tubes sans être une orbite homoclinique (voir figure 3.5).

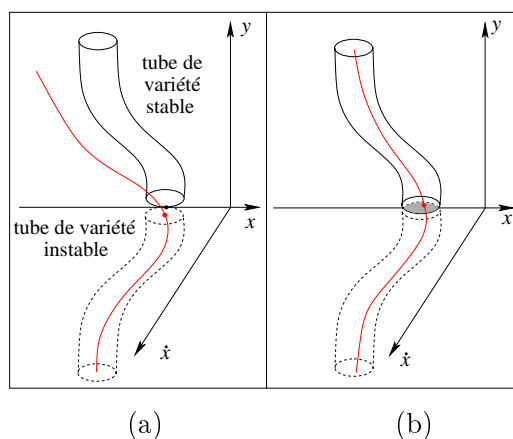


FIG. 3.5 – (a) Les tubes de variétés stable et instable ne se rencontrent qu'en un seul point. Il est donc impossible d'avoir une orbite se trouvant en même temps à l'intérieur des deux tubes.

(b) Si les tubes se croisent d'une manière transversale, des orbites de transit double peuvent exister.

Dans cette section, nous allons résumer les résultats analytiques de LMS. Pour cela, nous devons tout d'abord établir quelques notations et effectuer quelques rappels :

- Nous avons montré dans le chapitre 2 qu'il existait, près de L_1 , une famille d'orbites périodiques instables (celles de Lyapunov). Nous avons également mentionné dans la section 2.3 que lorsque la constante de Jacobi C s'approche de C_1 , l'orbite périodique \overline{L}_1 tend vers L_1 .
- Du travail de Conley(1968), nous savons que d'un côté, L_1 possède des variétés invariantes stables et instables à une dimension, notées $W_{L_1}^s$ et $W_{L_1}^i$. D'autre part, \overline{L}_1 possède des variétés invariantes stables et instables à deux dimensions, que nous noterons d'une manière similaire $W_{\overline{L}_1}^s$ et $W_{\overline{L}_1}^i$ et qui sont localement difféomorphes à des cylindres.
- Nous rappelons aussi qu'une orbite homoclinique relative à L_1 ou \overline{L}_1 est une orbite qui tend vers L_1 ou \overline{L}_1 , que t tende vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par conséquent, l'orbite se trouve sur la variété stable et la variété instable de l'objet considéré.
- Définissons maintenant une orbite homoclinique transversale :
Une orbite homoclinique est dite transversale si on peut trouver un point de son orbite tel que les espaces tangents des variétés stable et instable en ce point engendrent la totalité de l'espace tangent à la surface d'énergie en ce point.

Notons à présent que les équations (1.13)

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \end{cases} \quad (3.1)$$

ont une symétrie qui va nous être très utile pour montrer la transversalité des orbites homocliniques. Rappelons que $\Omega = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}$ et que Ω_x et Ω_y dénotent respectivement les dérivées de Ω par rapport à x et à y . Nous avons défini $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ et $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}$.

La symétrie est la suivante :

$$s : (x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \longrightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t) \quad (3.2)$$

Calculons l'effet de la symétrie sur r_1 , r_2 , Ω_x et Ω_y :

$$\begin{aligned}
r_1(x, -y) &= \sqrt{(x + \mu)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2} = r_1(x, y) \\
r_2(x, -y) &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2} = r_2(x, y) \\
\Omega_x(x, y) &= x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3} \\
\Rightarrow \Omega_x(x, -y) &= x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3} = \Omega_x(x, y) \\
\Omega_y(x, y) &= y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\
\Rightarrow \Omega_y(x, -y) &= -y + \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3} = -\Omega_y(x, y)
\end{aligned}$$

Et donc, l'action de la symétrie s dans les équations (3.1) nous donnera :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{d(-t)^2} - 2 \frac{d(-y)}{d(-t)} &= \Omega_x & \frac{d^2(-y)}{d(-t)^2} + 2 \frac{dx}{d(-t)} &= -\Omega_y \\
\Rightarrow \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x & \Rightarrow -\ddot{y} - 2\dot{x} &= -\Omega_y
\end{aligned}$$

et nous avons bien des équations équivalentes à celles de (3.1).

Par conséquent, **si nous connaissons la variété instable de L_1 ou de \bar{L}_1 , la variété stable correspondante est obtenue en utilisant la symétrie s .** Cette observation sera précieuse pour trouver des orbites homocliniques transversales.

3.2.1 Résultats analytiques pour \bar{L}_1 dans la région intérieure

En utilisant la structure de McGehee, LMS (1985) ont pu prouver les théorèmes ci-dessous, deux résultats analytiques. Ces théorèmes nous disent que pour des valeurs de μ suffisamment petites et pour des grandeurs de $\Delta C = C_1 - C$ appropriées, les variétés invariantes $W_{\bar{L}_1}^{s,\mathcal{S}}$ et $W_{\bar{L}_1}^{i,\mathcal{S}}$ se rencontrent d'une manière transversale dans la région intérieure.

Théorème 3.2.1 *Pour μ suffisamment petit, $W_{\bar{L}_1}^{i,\mathcal{S}}$, la partie de $W_{\bar{L}_1}^i$ dans la région intérieure \mathcal{S} , a une projection sur l'espace des positions donnée par :*

$$d = \mu^{1/3} \left(\frac{2}{3}N - 3^{1/6} + M \cos t + o(1) \right),$$

$$\alpha = -\pi + \mu^{1/3} (Nt + 2M \sin t + o(1)),$$

où d représente la distance à la courbe de vitesse nulle, α est la coordonnée angulaire et N et M sont des constantes.

En particulier, pour une séquence de valeurs de μ qui ont l'expresion suivante : $\mu_k = \frac{1}{N^3 M^3} (1 + o(1))$, la première intersection de cette projection avec l'axe des x est **orthogonale** à cet axe, produisant une orbite (1,1)-homoclinique pour L_1 .

Théorème 3.2.2 *Pour μ et $\Delta C = C_1 - C$ suffisamment petits, la branche $W_{\bar{L}_1}^{i,\mathcal{S}}$ de $W_{\bar{L}_1}^i$ intersecte le plan $y = 0$ pour $x < 0$ en une courbe difféomorphe à un cercle.*

En particulier, pour des points du plan (μ, C) tels qu'il existe un μ_k du théorème précédent pour lequel la condition

$$\Delta C > L \mu_k^{4/3} (\mu - \mu_k)^2 \quad (3.3)$$

est vérifiée (où L est une constante), il existe des orbites (1,1)-homocliniques symétriques et transversales.

Faisons quelques observations à propos de ces théorèmes :

- 1. Dans les théorèmes, lorsque nous parlons d'orbites (1,1)-homocliniques, le préfixe (1,1) se réfère à la 1ère intersection de la variété instable et de la variété stable de L_1 avec la section de Poincaré définie par le plan $y = 0$, dans la partie $x < 0$. Pour se référer à la q -ième intersection de la variété instable avec cette même section de Poincaré et à la p -ième intersection de la variété stable avec cette section, nous utiliserons donc le préfixe (q, p) .

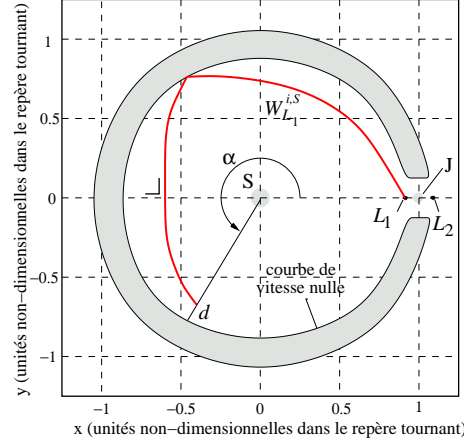


FIG. 3.6 – Illustration du théorème (3.2.1). On peut voir que la variété coupe l'axe x orthogonalement.

- 2. Le premier théorème concerne la variété instable du point d'équilibre L_1 , $W_{L_1}^{i,S}$. Il nous donne l'expression de la projection de cette variété sur le plan (x, y) (voir figure 3.6).

Rappelons que les variétés du point d'équilibre sont unidimensionnelles tandis que celles relatives à l'orbite périodique sont bidimensionnelles. Il est aussi important de rappeler que ces variétés évoluent dans un espace à **quatre** dimensions, (x, y, \dot{x}, \dot{y}) .

- 3. Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une orbite (1,1)-homoclinique symétrique, c'est-à-dire dont les variétés se croisent lors de leur première intersection avec le plan $y = 0$ dans la partie $x < 0$, est qu'elles le traversent en $\dot{x} = 0$. En effet, rappelons la symétrie s (3.2) :

$$s : (x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \longrightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t).$$

Nous avons déduit que si l'on connaissait la variété instable de L_1 ou de son orbite périodique, la variété stable nous était donnée par cette symétrie. Par conséquent, si nous cherchons à obtenir une orbite **(1,1)-homoclinique symétrique**, il faut que l'on ait au croisement des deux variétés :

$$\begin{aligned} y = -y &\Rightarrow y = 0 \\ \dot{x} = -\dot{x} &\Rightarrow \dot{x} = 0. \end{aligned}$$

Donc, si la variété traverse le plan $y = 0$ en $\dot{x} = 0$, cela correspond, dans l'espace (x, y, \dot{x}) , à couper l'axe x .

- 4. Le point important du premier théorème est qu'il existe un ensemble discret de valeurs de μ , les μ_k , pour lesquelles la première intersection de $W_{L_1}^{i,S}$ avec l'axe x

est orthogonale.

Proche de l'intersection, la composante x de $W_{L_1}^{i,S}$ ne varie donc pas, ce qui implique $\dot{x} = 0$. On voit alors que, uniquement pour ces μ_k , il existe bien une orbite homoclinique. Dans les figures suivantes, nous n'utiliserons jamais la dimension \dot{y} car, par la symétrie s (3.2), les composantes en \dot{y} des deux variétés sont toujours identiques.

La figure 3.7(a) donne une image mentale des variétés de L_1 dans l'espace (x, y, \dot{x}) . On voit que si $\dot{x} \neq 0$, les variétés ne peuvent se croiser à leur première intersection avec le plan $y = 0$ dans la partie $x < 0$. La partie (b) de cette figure montre simplement que même si la projection de ces variétés sur le plan (x, y) semble montrer qu'elles se croisent, il n'en est rien. Il faut absolument que leurs projections soient orthogonales à l'axe x ($\dot{x} = 0$).

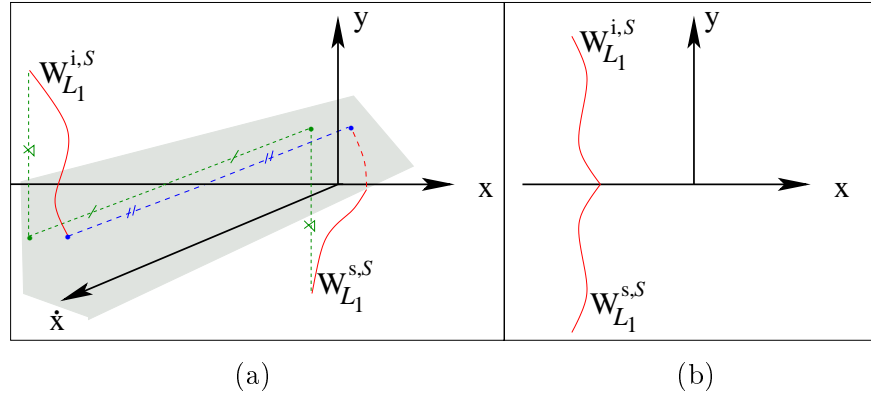


FIG. 3.7 – (a) Illustration d'un morceau des variétés stable ($W_{L_1}^{s,S}$) et instable ($W_{L_1}^{i,S}$) de L_1 dans l'espace (x, y, \dot{x}) . On voit que ces variétés ne croisent pas l'axe x .

(b) Projection de ces mêmes variétés sur le plan (x, y) .

- 5. Le théorème 3.2.2 nous apprend que si ΔC est plus grand qu'une certaine valeur dépendant de μ et des μ_k du théorème précédent, nous obtenons également des orbites (1,1)-homocliniques transversales et symétriques, mais cette fois relatives à l'orbite périodique \bar{L}_1 .

Reprenons la condition (3.3) de ce théorème : $\Delta C > L\mu_k^{4/3}(\mu - \mu_k)^2$. Nous voyons que si $\mu = \mu_k$, la condition est satisfaite. Comme nous sommes dans le cas 2 ($C_1 > C > C_2$), $\Delta C = C_1 - C$ est toujours positif.

Nous aurons donc bien une orbite (1,1)-homoclinique si $\mu = \mu_k$.

- 6. Définissons maintenant $\Gamma_1^{i,S}$ comme étant la première intersection de $W_{L_1}^{i,S}$ avec le plan $y = 0$ dans la région $x < 0$. $\Gamma_1^{s,S}$ est donc la première intersection de la

variété stable avec ce plan, et si nous voulions écrire sa troisième intersection, nous la noterions bien entendu $\Gamma_3^{s,\mathcal{S}}$.

Par le théorème 3.2.2, nous savons que $\Gamma_1^{i,\mathcal{S}}$ est une courbe difféomorphe à un cercle (figure 3.8).

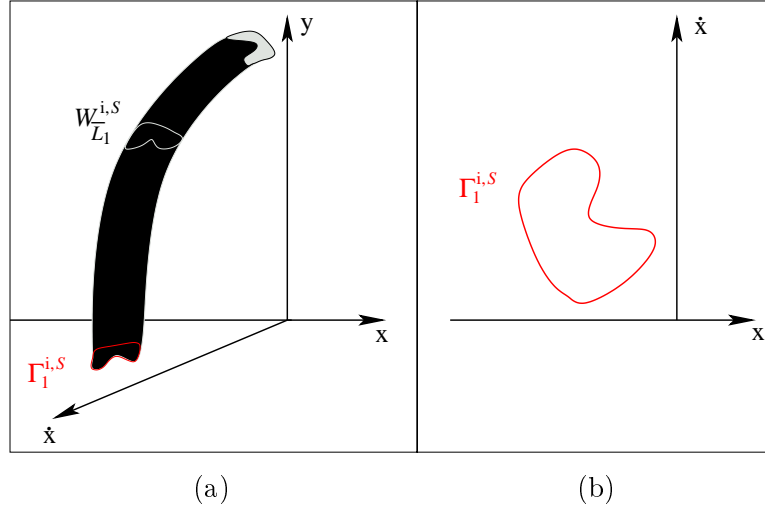


FIG. 3.8 – (a) Illustration d'un morceau de la variété instable de \overline{L}_1 , $W_{\overline{L}_1}^{i,\mathcal{S}}$ dans l'espace (x, y, \dot{x}) et de sa première intersection avec le plan $y = 0$, nommée $\Gamma_1^{i,\mathcal{S}}$.

(b) $\Gamma_1^{i,\mathcal{S}}$ dans le plan (x, \dot{x}) (ou $y = 0$).

- 7. D'après le premier théorème et la quatrième observation, nous savons que pour tout $\mu \neq \mu_k$, la variété instable associée à L_1 coupe le plan (x, \dot{x}) autre part que sur l'axe x (où $\dot{x} = 0$), rendant l'existence d'une orbite (1,1)-homoclinique impossible.

Pour $\mu \neq \mu_k$ et par le théorème 3.2.2, nous savons que si ΔC est trop petit, $\Gamma_1^{i,\mathcal{S}}$ ne coupe pas l'axe x , c'est-à-dire que la variété instable de \overline{L}_1 coupe le plan $y = 0$ en des points autres que $\dot{x} = 0$. Par conséquent (observation ► 3), il n'y a pas d'orbite (1,1)-homoclinique symétrique.

- 8. Nous avons vu dans la section 2.3 que les axes de l'ellipse qui représentent l'orbite périodique dans le plan (x, y) grandissent si l'énergie grandit, c'est-à-dire si C s'éloigne de C_1 ou encore si ΔC augmente.

Ainsi, si ΔC augmente, on espère que $\Gamma_1^{i,\mathcal{S}}$ augmentera aussi.

Supposons que $\Gamma_1^{i,\mathcal{S}}$ ne croise pas l'axe x . Il est alors possible d'augmenter ΔC jusqu'à une valeur supérieure à celle du théorème 3.2.2 de telle sorte que $\Gamma_1^{i,\mathcal{S}}$ devienne tangent ou même croise l'axe x en plus d'un point (figure 3.9(a)).

Par la symétrie s (observation ► 3), nous savons que $\Gamma_1^{s,\mathcal{S}}$ coupera l'axe x aux

mêmes points que $\Gamma_1^{i,S}$ (figure 3.9(b)). Ces points où l'intersection de $\Gamma_1^{i,S}$ et de $\Gamma_1^{s,S}$ est non vide correspondront aux orbites (1,1)-homocliniques symétriques. Si $\Gamma_1^{i,S}$ est transversale à $\Gamma_1^{s,S}$, alors l'orbite homoclinique sera appelée transversale. La figure 3.9(b) illustre ce cas et la partie ombragée représente la région d'intersection des variétés stable et instable de \bar{L}_1 . C'est par cette région que passeront les orbites de transit double.

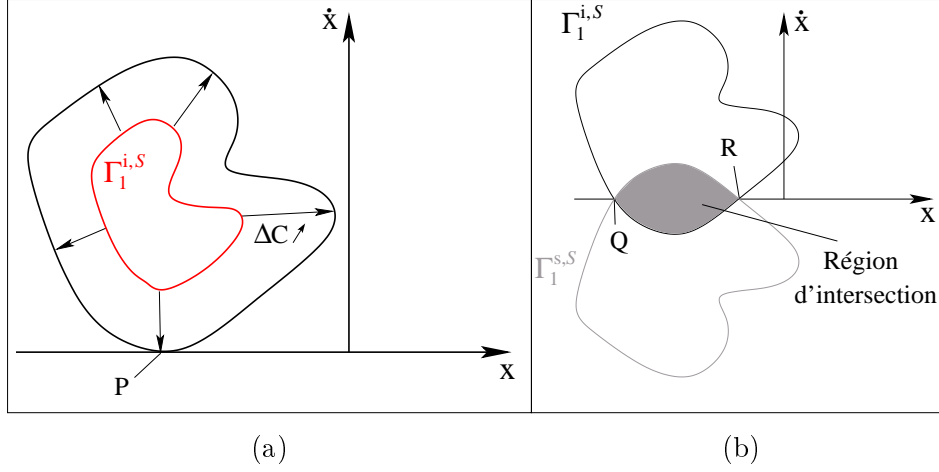


FIG. 3.9 – (a) Illustration de l'élargissement de $\Gamma_1^{i,S}$ quand ΔC augmente. On peut voir que P est un point de contact avec l'axe x et correspondra dans ce cas à une orbite (1,1)-homoclinique non transversale.

(b) $\Gamma_1^{i,S}$ a deux points d'intersection avec l'axe x et, par symétrie, ces deux points appartiennent aussi à $\Gamma_1^{s,S}$. Q et R correspondent donc à deux orbites (1,1)-homocliniques symétriques transversales.

- 9. Ce qu'il faut surtout retenir de cette dernière observation et plus globalement du théorème 3.2.2, c'est que pour la grande variété de μ qui existe dans le Système Solaire, il est possible de trouver un ΔC suffisamment grand tel que les variétés invariantes de l'orbite de Lyapunov \bar{L}_1 se croisent transversalement.

3.3 L'existence d'orbites homocliniques transversales dans la région extérieure

Dans la section 3.1, nous avons repris une preuve de Conley et McGehee (1969) pour l'existence d'orbites homocliniques dans les régions intérieure et extérieure.

Dans la section 3.2, nous avons synthétisé les résultats du groupe LMS, qui a montré analytiquement l'existence d'orbites (1,1)-homocliniques symétriques et transversales pour la région intérieure, sous des conditions adéquates.

Dans la suite, notre but sera de trouver des orbites homocliniques transversales à la fois dans les régions intérieure et extérieure. Koon *et al.* (2000) ont pu prouver leur existence grâce à des explorations numériques en dessinant les variétés invariantes, mais dans ce travail, nous n'avons pas reproduit ces dessins numériquement. Nous nous sommes contentés de les illustrer schématiquement.

Nous allons donc étudier l'existence d'orbites homocliniques relatives à \overline{L}_2 . Bien qu'il n'existe aucun résultat analytique concernant l'existence de telles orbites, il est possible de les construire numériquement en cherchant l'intersection des variétés invariantes $W_{\overline{L}_2}^i$ et $W_{\overline{L}_2}^s$ sur la section de Poincaré que nous avons déjà utilisée auparavant, à savoir la section $y = 0$ dans la partie $x < 0$. Rappelons que le plan $y = 0$ est en fait la droite qui passe par le Soleil et Jupiter dans le repère tournant.

Avant toute chose, signalons les notations que nous allons utiliser :

- La partie de la variété $W_{\overline{L}_2}^i$ qui se trouve dans la région extérieure \mathcal{X} sera appelée $W_{\overline{L}_2}^{i,\mathcal{X}}$.
- La première intersection de $W_{\overline{L}_2}^{i,\mathcal{X}}$ avec le plan $y = 0$ s'appelle $\Gamma_1^{i,\mathcal{X}}$. Cette intersection est une courbe difféomorphe à un cercle.
- Certains arcs de la variété instable peuvent couper plusieurs fois le plan $y = 0$ dans la partie $x < 0$. Nous appellerons $\Gamma_q^{i,\mathcal{X}}$ la q-ième intersection de $W_{\overline{L}_2}^{i,\mathcal{X}}$ avec ce demi-plan.
- La partie de la variété stable dans \mathcal{X} sera bien entendu appelée $W_{\overline{L}_2}^{s,\mathcal{X}}$ et sa q-ième intersection avec le plan $y = 0$ dans la région $x < 0$ sera $\Gamma_q^{s,\mathcal{X}}$.

Pour montrer que des orbites homocliniques transversales existent dans la région \mathcal{X} , nous allons donc chercher les intersections de $\Gamma_p^{i,\mathcal{X}}$ et de $\Gamma_q^{s,\mathcal{X}}$.

Soit un point P tel que :

$$1) P \in \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) | y = 0, x < 0\}$$

$$2) P \in \Gamma_p^{i, \mathcal{X}} \cap \Gamma_q^{s, \mathcal{X}}.$$

Alors, P sera appelé un **point (p, q) -homoclinique**.

McGehee (1969) a montré l'existence de tels points pour certains p et q .

Koon *et al.* (2000) ont quant à eux voulu obtenir des points (p, q) -homocliniques avec p et q les plus petits possibles. En d'autres termes, il faut obtenir la première intersection des variétés stable et instable dans le plan $y = 0$, même si elles ne se croisent pas la première fois qu'elles le traversent.

D'autres intersections, c'est-à-dire pour des p et q plus grands, peuvent exister, produisant d'autres orbites homocliniques, mais nous nous restreindrons ici à la première intersection.

Par explorations numériques, il est possible de trouver ces intersections. Il faut utiliser plusieurs niveaux d'énergie différents, dessiner les variétés invariantes et voir dans quels cas elles se croisent.

Nous allons analyser deux cas : celui où p et q sont égaux et celui où ils sont différents. En d'autres mots, nous verrons ce qu'il se passe lorsque l'on considère la même intersection des variétés stable et instable avec le plan $y = 0$ (par exemple la seconde) et lorsque l'on considère des intersections différentes (par exemple la seconde et la troisième).

1. $p = q$

Supposons maintenant que $\Gamma_q^{i, \mathcal{X}}$ soit une courbe fermée dans le plan (x, \dot{x}) . Par la symétrie s (3.2), nous savons que la projection de $\Gamma_q^{s, \mathcal{X}}$ sur ce même plan sera la courbe symétrique à $\Gamma_q^{i, \mathcal{X}}$ par rapport à l'axe \dot{x} .

Comme dans le cas des orbites (1,1)-homocliniques, une intersection ne sera possible que si $\Gamma_q^{i, \mathcal{X}}$ (et donc $\Gamma_q^{s, \mathcal{X}}$ par symétrie) croise l'axe x , c'est-à-dire si au moins un point de $\Gamma_q^{i, \mathcal{X}}$ a une coordonnée $\dot{x} = 0$ (figure 3.10). Si une telle intersection existe, nous aurons donc un point (q, q) -homoclinique symétrique.

Si l'intersection de ces deux courbes est transversale, nous obtiendrons une orbite (q, q) -homoclinique symétrique *transversale*.

Nous constatons qu'il peut y avoir d'autres intersections que sur l'axe x , comme sur la figure 3.10. Dans ce cas, on dira que les orbites homocliniques sont non-symétriques.

- Nous notons quatre intersections de $\Gamma_q^{i, \mathcal{X}}$ et $\Gamma_q^{s, \mathcal{X}}$ sur l'axe $\dot{x} = 0$ (points rouges) qui

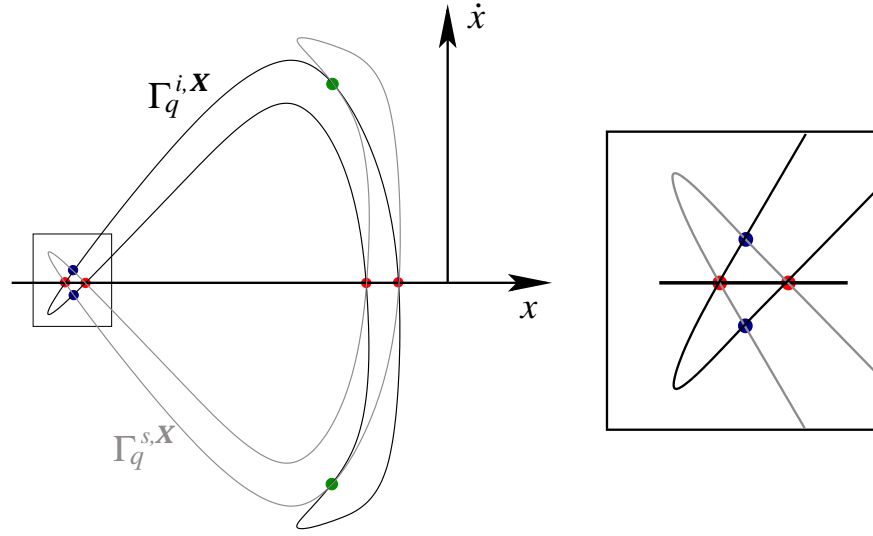


FIG. 3.10 – Points d'intersection de $\Gamma_q^{i,\mathcal{X}}$ et de $\Gamma_q^{s,\mathcal{X}}$. On voit qu'il peut exister des intersections autre part que sur l'axe x .

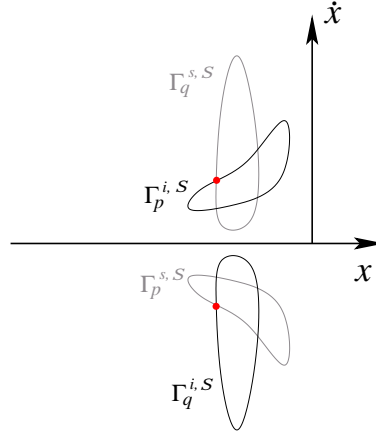
sont en fait des points (q, q) -homocliniques transversaux (les variétés se croisent de manière transversale).

- Nous remarquons également deux intersections, les points bleus, en dehors de $\dot{x} = 0$. Comme ces points (q, q) -homocliniques se produisent près de $\dot{x} = 0$, les orbites homocliniques correspondantes seront appelées “presque symétriques”.
- Enfin, un cas plus prononcé de “non-symétrie” se présente pour les intersections les plus éloignées de l'axe x (les deux points verts). Insistons sur le fait que les intersections se trouvent toujours dans le plan $y = 0$, mais qu'elles ne le coupent plus d'une manière orthogonale ($\dot{x} \neq 0$).

2. $p \neq q$

Voici quelques remarques dans le cas où nous analysons la p -ième intersection de la variété instable avec le plan $y = 0$ et la q -ième intersection de la variété stable avec ce même plan :

- 1. Tout d'abord, il est bon de remarquer qu'il n'est plus nécessaire que $\Gamma_p^{i,\mathcal{X}}$ coupe l'axe x pour que les variétés se croisent. En effet, $\Gamma_p^{i,\mathcal{X}}$ et $\Gamma_q^{s,\mathcal{X}}$ ne sont plus symétriques par rapport à l'axe $\dot{x} = 0$ et des intersections peuvent se produire pour des valeurs autres que $\dot{x} = 0$ (voir figure 3.11).

FIG. 3.11 – Illustration d'intersections de $\Gamma_p^{i, \mathcal{X}}$ et $\Gamma_q^{s, \mathcal{X}}$.

- 2. Si les projections $\Gamma_p^{i, \mathcal{X}}$ et $\Gamma_q^{s, \mathcal{X}}$ des variétés stable et instable se croisent, alors, par symétrie, $\Gamma_q^{i, \mathcal{X}}$ et $\Gamma_p^{s, \mathcal{X}}$ se croiseront également. La figure 3.11 nous permet de mieux le comprendre. Cela implique que s'il existe un point (p, q) -homoclinique, il y a un point (q, p) -homoclinique associé qui est son symétrique par rapport à l'axe $\dot{x} = 0$ (les deux points indiqués sur la figure).

Dans ce chapitre, nous avons donc montré l'existence d'orbites homocliniques transversales, que ce soit dans la région intérieure ou extérieure.

Chapitre 4

Connexions et cycles hétérocliniques

Notre but, dans ce chapitre, sera de montrer comment des orbites homocliniques de la région intérieure sont connectées à des orbites homocliniques de la région extérieure par une connexion hétéroclinique.

Rappelons qu'une connexion hétéroclinique entre une paire d'orbites périodiques est une orbite qui se trouve à la fois sur la variété stable d'une orbite périodique et sur la variété instable de l'autre. Elle fait donc le lien entre les deux orbites périodiques.

Nous pouvons ajouter que, dans la théorie des systèmes dynamiques, une seule orbite hétéroclinique ne fournit pas de mécanisme suffisamment puissant pour permettre à un objet de retourner d'où il vient. Par contre, deux orbites hétérocliniques, l'une connectant \overline{L}_1 à \overline{L}_2 et l'autre \overline{L}_2 à \overline{L}_1 , forment un cycle et produisent ce genre de mécanisme, ce qui peut générer des dynamiques très compliquées.

Nous utiliserons de nouveau des méthodes semi-analytiques pour montrer l'existence de connexions hétérocliniques dans la région de Jupiter, qui connectent asymptotiquement \overline{L}_1 et \overline{L}_2 .

4.1 L'existence de connexions hétérocliniques

La méthode utilisée pour prouver l'existence d'orbites hétérocliniques sera très similaire à celle de la dernière section du chapitre précédent.

Il est possible de les construire en trouvant d'abord une intersection entre les variétés invariantes de \overline{L}_1 et \overline{L}_2 .

Pour cela, il faut chercher les points d'intersection sur une section de Poincaré bien choisie grâce à des explorations numériques successives. Ici encore, nous avons choisi d'illustrer

des résultats de Koon *et al.* (2000) et non de les reproduire exactement.

Avant de procéder proprement dit à la construction d'orbites hétérocliniques, mettons en place quelques éléments :

- Il faut remarquer que nous nous restreindrons au cas 3, celui où la constante de Jacobi C est telle que $C_2 > C > C_3$. Cela signifie que la région de Hill est juste assez ouverte pour permettre aux orbites de Lyapunov de L_1 et L_2 d'exister.
- Nous appellerons $W_{\overline{L}_1}^{i,\mathcal{J}}$ la partie de la variété instable de \overline{L}_1 qui entre dans la région \mathcal{J} .
- Similairement, nous appellerons $W_{\overline{L}_2}^{s,\mathcal{J}}$ la partie de la variété stable de \overline{L}_2 qui entre dans \mathcal{J} .
- La section de Poincaré que nous choisirons sera $x = 1 - \mu$, c'est-à-dire le plan coupant Jupiter orthogonalement à l'axe x .
Nous choisissons cette section car elle maximise le nombre d'intersections entre $W_{\overline{L}_1}^{i,\mathcal{J}}$ et $W_{\overline{L}_2}^{s,\mathcal{J}}$ pour des variétés qui ne font qu'un nombre limité de tours autour de Jupiter avant de s'échapper de \mathcal{J} .
- Enfin, nous noterons $\Gamma_{\overline{L}_1,q}^{i,\mathcal{J}}$ la q -ième intersection de $W_{\overline{L}_1}^{i,\mathcal{J}}$ avec la section de Poincaré $x = 1 - \mu$. $\Gamma_{\overline{L}_2,p}^{s,\mathcal{J}}$ sera quant à elle la p -ième intersection de $W_{\overline{L}_2}^{s,\mathcal{J}}$ avec $x = 1 - \mu$.

Des expériences numériques ont montré que la variété instable de \overline{L}_1 ne coïncide pas avec la variété stable de \overline{L}_2 mais que, pour une grande gamme de valeurs de μ et de C , l'intersection des deux variétés est bien transversale.

Le cas où l'intersection est tangente ne nous intéressera pas.

Montrons maintenant comment construire une orbite hétéroclinique qui provient de \overline{L}_1 (quand $t \rightarrow -\infty$) et tend vers \overline{L}_2 (quand $t \rightarrow +\infty$).

Supposons que $\Gamma_{\overline{L}_1,p}^{i,\mathcal{J}}$ et $\Gamma_{\overline{L}_2,q}^{s,\mathcal{J}}$ soient des courbes fermées dans le plan (y, \dot{y}) .

Un point P qui se trouve dans le plan $x = 1 - \mu$ et tel que $P \in \Gamma_{\overline{L}_1,p}^{i,\mathcal{X}} \cap \Gamma_{\overline{L}_2,q}^{s,\mathcal{X}}$ est un point (p, q) -hétéroclinique.

Un tel point correspondra à une orbite hétéroclinique allant de \overline{L}_1 à \overline{L}_2 .

Sur la figure 4.1(a), nous pouvons voir deux points (2,2)-hétérocliniques. On remarque que les premières intersections de $W_{\overline{L}_1}^{i,\mathcal{J}}$ et de $W_{\overline{L}_2}^{s,\mathcal{J}}$ avec $x = 1 - \mu$ ne se croisent pas, mais que les secondes se rencontrent bien.

Sur cette même figure, la partie ombrée représente la région d'intersection des variétés. C'est par cette région que passeront les orbites qui transiteront du voisinage de \overline{L}_2 au

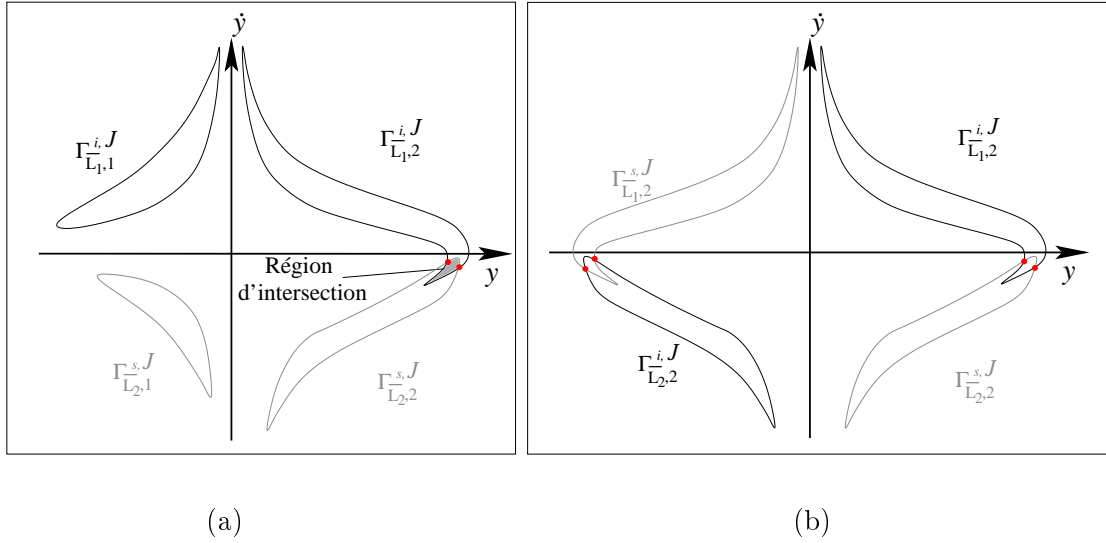


FIG. 4.1 – (a) Illustration de points $(2, 2)$ -hétérocliniques (les deux gros points).

(b) Grâce à la symétrie du problème, nous aurons également des points dont les coordonnées en y seront opposées. Cela nous permettra d'avoir un cycle hétéroclinique.

voisinage de \overline{L}_1 .

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour contruire une trajectoire hétéroclinique allant de \overline{L}_1 à \overline{L}_2 .

Si nous voulons une trajectoire qui va dans le sens contraire, c'est-à-dire de \overline{L}_2 à \overline{L}_1 , il suffit d'utiliser la symétrie s (3.2). En effet les points d'intersection de $\Gamma_{\overline{L}_1,p}^{i,\mathcal{J}}$ et $\Gamma_{\overline{L}_2,q}^{s,\mathcal{J}}$ seront exactement les symétriques des points d'intersection de $\Gamma_{\overline{L}_1,p}^{s,\mathcal{J}}$ et $\Gamma_{\overline{L}_2,q}^{i,\mathcal{J}}$ par rapport à l'axe \dot{y} (voir figure 4.1(b)). Ces deux *connexions hétérocliniques* forment ensemble ce que l'on appelle un **cycle hétéroclinique** (figure 4.2).

Par la symétrie s , nous aurons donc que s'il existe une connexion hétéroclinique, alors il existe un cycle hétéroclinique.

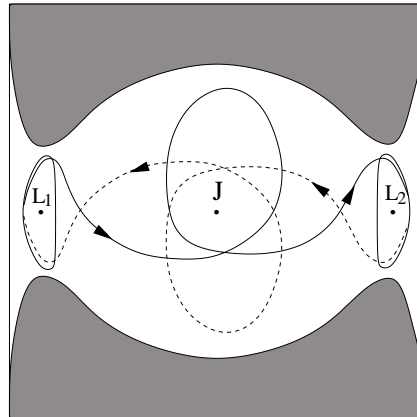


FIG. 4.2 – Illustration d'un cycle hétéroclinique

4.2 Les canaux dynamiques

Dans notre article de référence, Koon *et al.* (2000) ont utilisé une combinaison de méthodes analytiques et de techniques numériques pour montrer l'existence d'orbites homocliniques et hétérocliniques associées aux orbites de Lyapunov \overline{L}_1 et \overline{L}_2 .

L'intérêt de ces développements est d'assembler d'une part les tubes d'orbites homocliniques associées à \overline{L}_1 et \overline{L}_2 et d'autre part le cycle hétéroclinique trouvé dans la section précédente.

Cette combinaison sera appelée un canal dynamique et engendrera des dynamiques très compliquées connectant les régions intérieure, extérieure et de Jupiter.

Ces canaux sont donc des "guides" du mouvement d'une comète ou d'un vaisseau spatial qui transiterait de X à I en passant par J, puis ressortirait vers X. En effet, nous avons vu dans le chapitre 2 que les orbites de transit se situaient à l'intérieur des tubes de variétés. De même, dans la section précédente, nous avons montré que si l'on désirait une orbite passant d'un voisinage de \overline{L}_1 à un voisinage de \overline{L}_2 , elle devait se trouver dans la région d'intersection des deux variétés.

La comète Oterma, par exemple, est guidée par un tel canal. Nous avons choisi $\mu = 0.0009537$ correspondant à celui de Jupiter et $C = 3.03$ qui est la constante de Jacobi d'Oterma lorsqu'elle s'approche de Jupiter. Grâce à un logiciel d'intégration numérique classique, nous avons pu simuler son mouvement (figure 4.3).

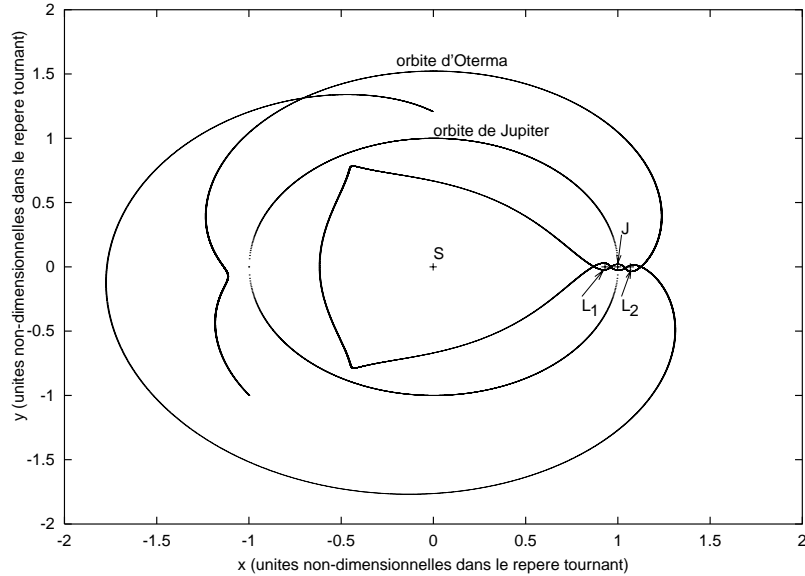


FIG. 4.3 – Simulation numérique de l'orbite de la comète Oterma. On voit clairement le passage dans la zone de Jupiter, puis dans la zone intérieure et enfin la sortie vers la zone extérieure.

Nous avons remarqué qu'Oterma transite de la région extérieure (X) vers la région intérieure (I) en passant par la région de Jupiter (J) et ressort ensuite vers X après

seulement une révolution autour du Soleil. Cela signifie que Oterma utilise un canal dynamique de la manière suivante (voir figure 4.5) :

1. elle passe dans le tube de variété stable de \overline{L}_2 dans la région X,
2. elle transite vers la région J dans le tube de variété instable de \overline{L}_2 ,
3. par une connexion hétéroclinique transversale entre \overline{L}_2 et \overline{L}_1 , elle entre dans le tube de variété stable de \overline{L}_1 dans J,
4. elle transite ensuite vers la région I dans le tube de variété instable de \overline{L}_1 ,
5. par la transversalité des variétés stable et instable de \overline{L}_1 , la comète pénètre dans le tube de variété stable de \overline{L}_1 dans I,
6. elle repassera dans la région J par le tube de variété instable de \overline{L}_1 ,
7. en utilisant le cycle hétéroclinique, elle passera dans le tube de variété stable de \overline{L}_2 dans la région J,
8. enfin, elle ressortira vers la région extérieure dans le tube de variété instable de \overline{L}_2 .

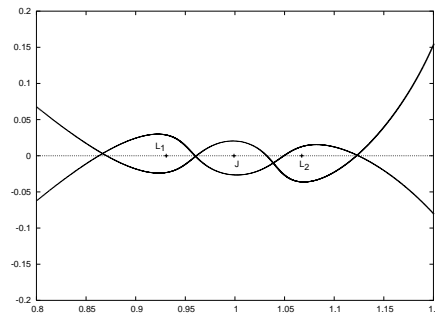


FIG. 4.4 – Zoom de la trajectoire d'Oterma sur la région de Jupiter.

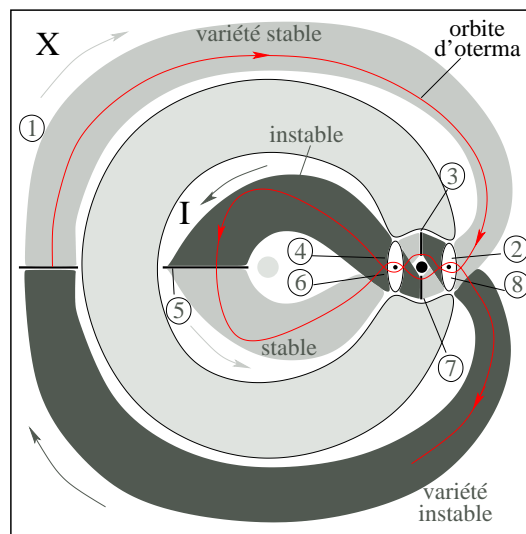


FIG. 4.5 – Illustration du canal dynamique qui guide l'orbite d'Oterma (rouge).

Chapitre 5

Application : Parvenir à la Lune à moindres coûts

Préambule

Après avoir montré dans le chapitre précédent que les outils développés dans ce travail pouvaient aider à modéliser des orbites réelles de comètes, nous allons à présent appliquer ces techniques à des trajectoires de vaisseaux spatiaux en nous intéressant au transfert de la Terre à la Lune.

Pour cela, nous nous baserons sur un autre article de Koon *et al.* (2001).

L'approche traditionnelle pour construire une orbite d'un vaisseau spatial en direction de la Lune est le *transfert de Hohmann*. Notre intérêt ne se portant pas sur l'étude de ce genre de transfert, nous nous contenterons de dire qu'il n'utilise pas le problème des trois corps et requiert un grand ΔV , c'est-à-dire une grande propulsion et donc une grande utilisation de fuel, pour que le vaisseau se rapproche rapidement et soit capturé par la Lune.

En 1991, la mission japonaise *Hiten*, ne pouvant se permettre de réaliser un transfert vers la Lune en se servant de la méthode classique, a utilisé les perturbations du Soleil pour un transfert à basse énergie, c'est-à-dire nécessitant une quantité moindre de ΔV , menant à une capture balistique du vaisseau par la Lune.

Dans ce chapitre, nous allons employer les techniques développées dans les chapitres précédents pour reproduire systématiquement une mission du type "Hiten".

- * Dans un premier temps, nous approximerons le système des quatre corps Soleil-Terre-Lune-vaisseau comme deux problèmes plans circulaires restreints des trois corps (PPCR3C) couplés, les problèmes Soleil-Terre-vaisseau et Terre-Lune-vaisseau.
- * Nous nous intéresserons alors à la construction d'un transfert Terre-Lune à basse énergie utilisant ces PPCR3C couplés. La première partie consistera à trouver une partie d'orbite telle que le vaisseau soit capturé par la Lune.
- * Dans la deuxième partie, nous utiliserons le système Soleil-Terre-vaisseau et la théorie des variétés invariantes développée précédemment pour montrer qu'on peut trouver une autre partie d'orbite dont l'origine est dans le voisinage de la Terre.
- * Enfin, dans la dernière partie, nous montrerons comment les deux portions d'orbites peuvent être reliées de manière à former une seule orbite avec une faible modification d'énergie ΔV à mi-parcours.

5.1 Le modèle des deux PPCR3C couplés

En utilisant avantageusement les dynamiques d'un système de quatre corps (Soleil-Terre-Lune-vaisseau), réaliser un transfert Terre-Lune demande significativement moins de fuel que lors d'un transfert de Hohmann.

Cependant, l'espace de phase d'un système de quatre corps est assez compliqué à mettre en œuvre, c'est pourquoi nous allons l'approximer par deux PPCR3C couplés, d'un côté le système Soleil-Terre-vaisseau, et de l'autre le système Terre-Lune-vaisseau.

Nous pourrions alors utiliser les structures relatives aux points d'équilibre de Lagrange mises au point dans ce travail.

La figure 5.1 illustre ce modèle dans le repère tournant du système Soleil-Terre-vaisseau.

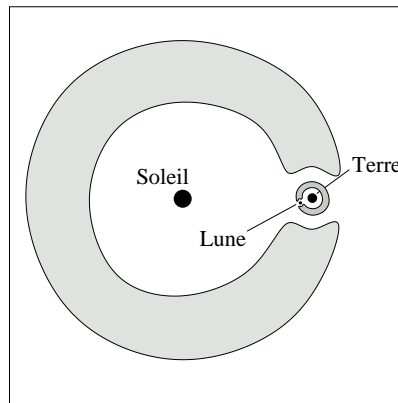


FIG. 5.1 – Illustration du modèle des PPCR3C couplés dans le repère tournant du système Soleil-Terre-vaisseau.

Dans ce modèle des PPCR3C couplés, la Lune se déplace sur une orbite circulaire autour de la Terre et celle-ci, ou plutôt le centre de masse de la Terre et de la lune, se meut sur une orbite circulaire autour du Soleil. L'orbite de la Lune se situe dans le plan de l'écliptique.

Dans la réalité, l'excentricité de la Lune est 0.055 et celle de la Terre est 0.017.

L'orbite de la lune quant à elle fait un angle de 5° avec le plan de l'écliptique.

Ces trois valeurs étant petites, nous considérons que le modèle des PPCR3C couplés est une bonne approximation du système des quatre corps Soleil-Terre-Lune-vaisseau.

Ajoutons que ce modèle n'est qu'une première approximation. Nous devrons ensuite tenir compte, pour plus de précision, des effets que nous avons négligés, comme l'excentricité, le mouvement de la Lune en dehors de l'écliptique ou encore l'attraction des autres planètes.

Néanmoins, ces PPCR3C couplés produisent un très bon aperçu du mouvement de la mission et donnent une idée intéressante de la marche à suivre.

5.2 Construction du transfert Terre-Lune

Pour construire le transfert Terre-Lune, nous utiliserons comme schéma mental le système tournant du Soleil et de la Terre, c'est-à-dire le système dans lequel le Soleil et la Terre ont des positions fixes. Si $\mu_T = m_T/(m_S + m_T)$, où m_S et m_T désignent respectivement les masses du Soleil et de la Terre, alors la position du Soleil dans ce repère tournant sera $(-\mu_T, 0)$ et celle de la Terre sera $(1 - \mu_T, 0)$ (voir chapitre 1).

Dans ce système, nous utiliserons la section de Poincaré $x = 1 - \mu_T$, c'est-à-dire le plan passant par la Terre. Cette section nous aidera à assembler les deux portions d'orbites que nous construirons indépendamment l'une de l'autre.

La stratégie de base consistera à choisir une condition initiale (en y, \dot{y}) pour le vaisseau sur cette section telle que :

1. quand on l'intègre en avant (temps croissant), le vaisseau soit guidée par la variété stable de la zone extérieure du \overline{L}_2 du système Terre-Lune et se fasse capturer balistiquement par la Lune.
2. quand on l'intègre en arrière (temps décroissant), le vaisseau se tienne proche de la variété instable du système Soleil-Terre et retourne dans un voisinage de la Terre.

Nous utiliserons deux propriétés importantes des structures relatives aux points de Lagrange.

Dans la première partie, nous utiliserons le fait que la variété stable de \overline{L}_2 dans la région

extérieure va guider notre vaisseau spatial jusqu'à ce qu'il soit capturé par la Lune. Dans la deuxième partie, nous nous servons de l'observation faite dans le chapitre 2, où nous avons remarqué que plus une orbite est proche du cylindre d'orbites asymptotiques à son approche de la région d'équilibre, plus elle tournera autour du cylindre avant de quitter cette région.

5.2.1 1^{ère} partie : La capture balistique par la Lune

Nous avons déjà mentionné à plusieurs reprises la capture balistique du vaisseau par la Lune. Définissons-la maintenant d'une manière formelle.

Capture balistique par la Lune signifie que le vaisseau, avec son niveau d'énergie de départ et sans aucune autre propulsion, va entrer dans la sphère d'influence de la Lune (20000 km) et faire au moins une révolution autour de l'astre.

Reste à savoir comment arriver à cette capture balistique. La réponse est une fois de plus en utilisant les tubes des variétés stable et instable comme des guides pour les trajectoires.

Etablissons clairement la marche à suivre pour arriver à une capture balistique (figure 5.2)

1. Tout d'abord, il faut choisir une condition initiale à l'intérieur du tube de la variété stable de \overline{L}_2 dans la région extérieure.
2. Par notre connaissance des dynamiques, nous savons que l'orbite transitera vers la région de la Lune dans le tube de variété instable de \overline{L}_2 .
3. Ensuite, il ne faut *pas* qu'elle passe dans la région d'intersection de la connexion hétéroclinique entre la variété instable de \overline{L}_2 et la variété stable de \overline{L}_1 . Si c'était le cas, elle serait dans le tube de variété instable de \overline{L}_1 et par conséquent transiterait vers la région intérieure dans le tube de variété instable de \overline{L}_1 , auquel cas nous n'aurions pas de révolution autour de la Lune.

Nous aurons donc une orbite de *non-transit*.

4. Pour des arguments similaires, nous ne voulons pas qu'elle entre dans le tube de la variété stable de \overline{L}_2 . Nous aurons donc de nouveau une orbite de non-transit et notre révolution autour de la Lune sera effectuée.

Nous pouvons continuer de la sorte pour avoir autant de révolution que voulu autour de la Lune.

Nous avons donc montré qu'il est possible de trouver une condition initiale telle que le

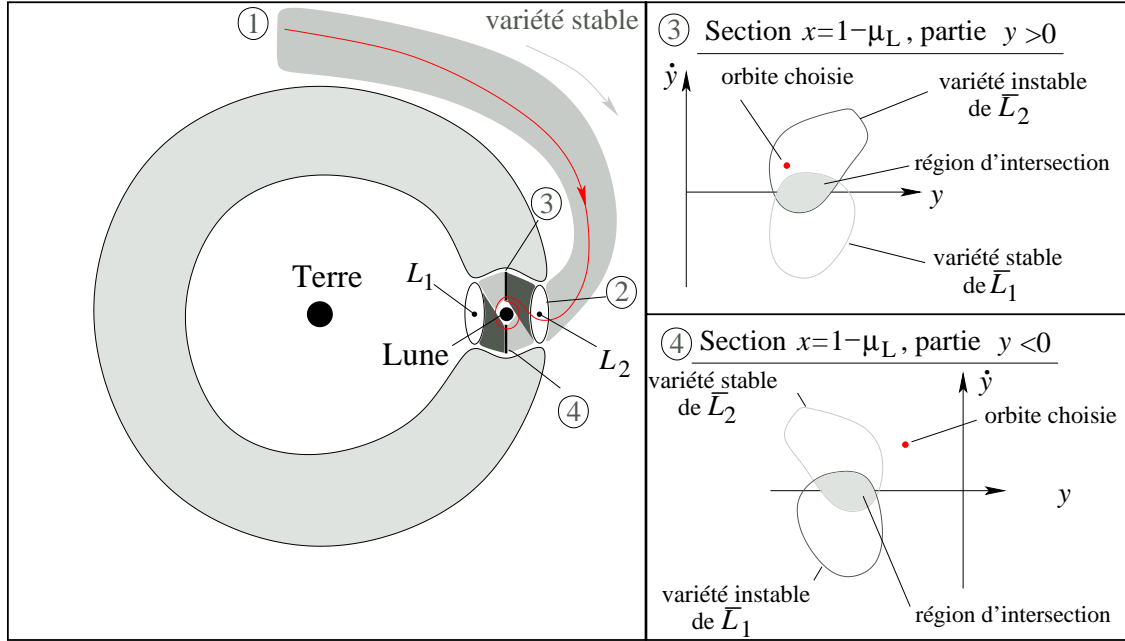


FIG. 5.2 – Illustration de la marche à suivre pour obtenir une capture balistique par la Lune. La partie gauche de la figure est représentée dans le système tournant Terre-Lune. Dans la partie droite, $\mu_L = m_L/(m_T + m_L)$ est la masse relative de la Lune.

vaisseau soit guidé jusqu'à une capture balistique par la Lune.

5.2.2 2^{ème} partie : Remonter jusqu'à la Terre

Montrons maintenant comment utiliser les variétés invariantes de l'orbite périodique de L_2 dans le système Terre-Soleil-vaisseau pour trouver une portion d'orbite qui connecte la section de Poincaré $x = 1 - \mu_T$ à la Terre.

Nous emploierons l'observation effectuée à la fin du chapitre 2 :

Plus une orbite est proche du cylindre d'orbites asymptotiques lorsqu'elle approche la région d'équilibre, plus elle effectuera de tours autour du cylindre dans la région d'équilibre avant de la quitter.

Supposons qu'un vaisseau se trouve à un point fixe (x, y, \dot{y}) proche d'un tube de variété. En faisant évoluer sa trajectoire, nous remarquons que son orbite est "torsadée" à l'approche de la région d'équilibre. Si nous changeons très légèrement sa vitesse initiale, de telle sorte que ce point se rapproche du tube, alors son orbite sera de plus en plus

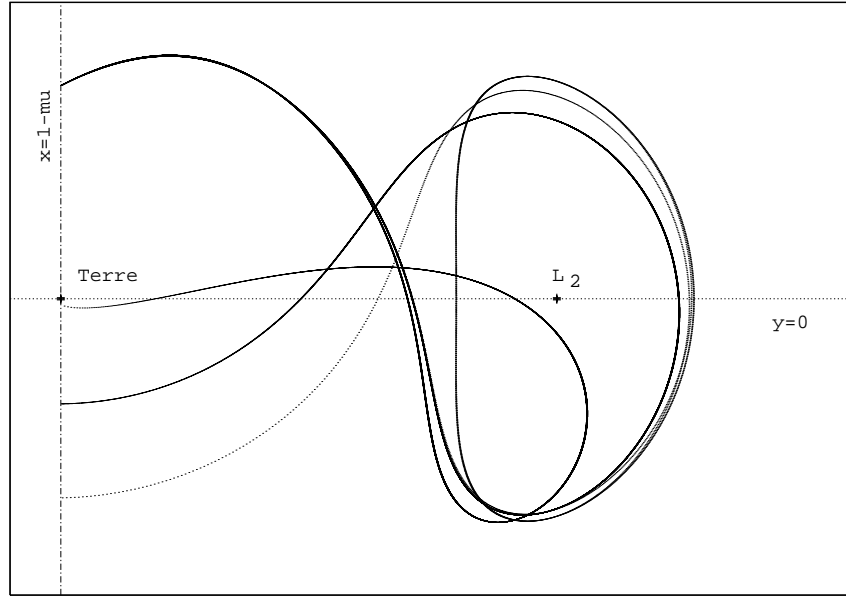


FIG. 5.3 – Intégration numérique des équations du mouvement à partir d’une condition initiale se trouvant juste en dehors du tube de variété, sur le plan $x = 1 - \mu_T$. Si on garde la même position, on voit qu’un infime changement dans le choix de \dot{y} peut changer complètement son orbite.

torsadée à mesure que nous nous approchons du cylindre d’orbites asymptotiques.

Par conséquent, si un vaisseau se trouve sur la section de Poincaré $x = 1 - \mu_T$ et que nous intégrons les équations en arrière, sa position, lorsqu’il rencontrera de nouveau la section, sera très sensible à tout changement de vitesse initiale, même très léger.

En fait, nous pourrions utiliser cette sensibilité pour cibler le vaisseau dans un voisinage de la Terre, comme sur la figure 5.3. Nous avons intégré les équations du mouvement avec un logiciel d’intégration courant et nous avons pu nous rendre compte de cette sensibilité. Une différence infime dans le choix de \dot{y} peut changer complètement l’endroit où l’orbite croisera la section $x = 1 - \mu_T$.

Voici une approche plus rigoureuse de la procédure à appliquer pour trouver ce genre d’orbite :

1. Choisir un niveau d’énergie C (dans le système Soleil-Terre-vaisseau), toujours tel que $C_2 > C > C_3$, mais surtout de telle sorte que la projection des variétés invariantes de \bar{L}_2 soit proche de la Terre.
2. Calculer la projection de la variété instable de \bar{L}_2 sur la section de Poincaré $x =$

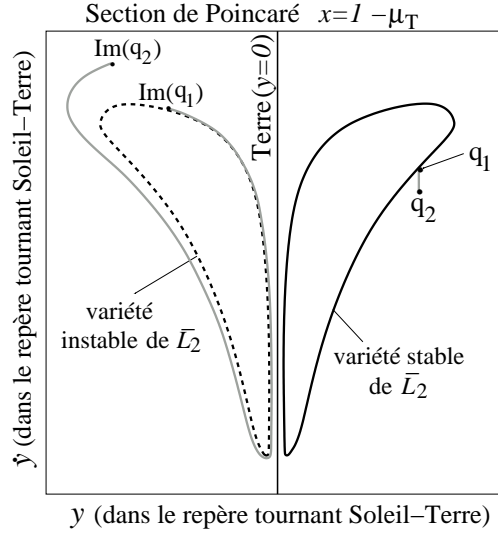


FIG. 5.4 – Illustration des variétés de \bar{L}_2 dans la section de Poincaré $x = 1 - \mu_T$. Nous remarquons que l'image d'un petit segment $[q_1, q_2]$ proche de la variété instable peut être très allongée.

$1 - \mu_T$. La figure 5.4 illustre la surface de section des variétés de \bar{L}_2 . D'après le point 1, nous avons choisi un niveau d'énergie de telle sorte que les variétés soient très proches de $y = 0$, c'est-à-dire de la Terre.

3. Choisir une condition initiale juste en dehors de la projection telle que si on intègre les équations en arrière, nous revenions dans un voisinage de la Terre.

Pour choisir cette condition initiale, prenons dans le plan $x = 1 - \mu_T$ un point q_1 juste à la limite extérieure de la variété instable ainsi qu'un point se situant à la verticale légèrement en dessous, que nous nommerons q_2 (figure 5.4).

Si nous intégrons les équations en prenant comme conditions initiales le segment $[q_1, q_2]$, nous voyons que, grâce à la torsion que les orbites subissent lorsqu'elles sont proches du tube de la variété et à leur grande sensibilité à tout changement en \dot{y} , ce segment retraverse le plan $x = 1 - \mu_T$ d'une manière très allongée.

Nous remarquons que la composante y de cette "image" de $[q_1, q_2]$ est très étendue et s'approche par moment de la Terre ($y = 0$). Par conséquent, il nous suffit de choisir un point à l'intérieur de $[q_1, q_2]$ (donc une condition initiale \dot{y}) telle que son image soit dans un voisinage de la Terre.

Il est important de remarquer que dans ce développement, nous avons laissé libre le choix du segment $[q_1, q_2]$. En d'autres termes, du moment que les variétés sont suffisamment proches de la Terre, nous pouvons choisir la condition initiale pratiquement à n'importe

quelle endroit proche de la variété stable dans la section $x = 1 - \mu_T$.

Nous disposons ainsi d'orbites partant d'un voisinage de la Terre et arrivant sur le plan $x = 1 - \mu_T$.

5.2.3 Connexion des deux parties

Nous possédons maintenant les deux parties nécessaires au transfert. Mais comment les connecter ?

En gros, il suffira de changer légèrement la vitesse du vaisseau et d'attendre que la Lune soit au bon endroit. En effet, grâce à un léger ΔV et pour une certaine position de la Lune, la variété instable de \bar{L}_2 du système Soleil-Jupiter et la variété stable de \bar{L}_2 du système Terre-Lune vont se croiser sur la section de Poincaré $x = 1 - \mu_T$ (voir figure 5.5).

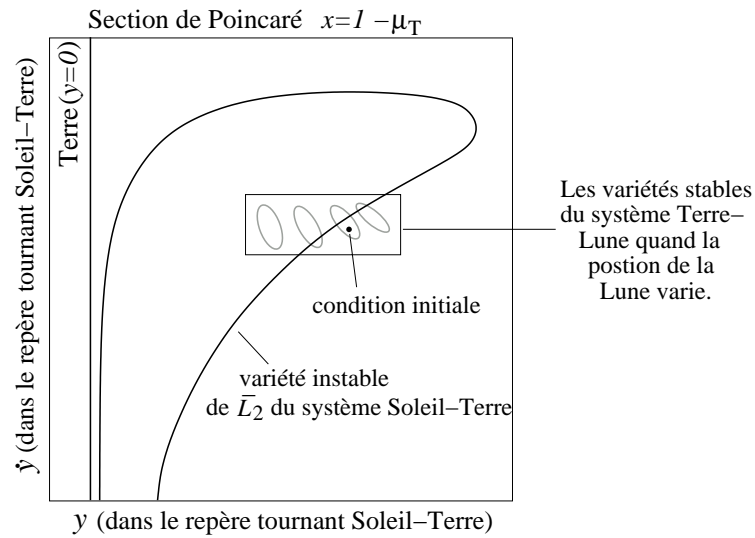


FIG. 5.5 – Choix de la bonne condition initiale au moment où les variétés se croisent. Il faut la choisir à l'intérieur de la courbe grise mais à l'extérieur de la courbe noire.

En utilisant nos connaissances des deux parties d'orbites, nous savons que si nous choisissons une condition initiale à l'intérieur de la variété stable du système Terre-Lune et légèrement à l'extérieur de la variété instable du système Soleil-Terre (voir figure 5.5), nous aurons que :

- quand nous intégrerons en avant les équations du problème, le vaisseau sera capturé balistiquement par la Lune,
- quand nous les intégrerons en arrière, la trajectoire épousera la variété instable de \bar{L}_2 dans le système Soleil-Terre puis après une torsion, épousera la variété stable

et enfin reviendra vers un voisinage de la Terre.

Pour finir, la figure 5.6 nous montre la trajectoire complète du vaisseau spatial dans le repère tournant Soleil-Terre.

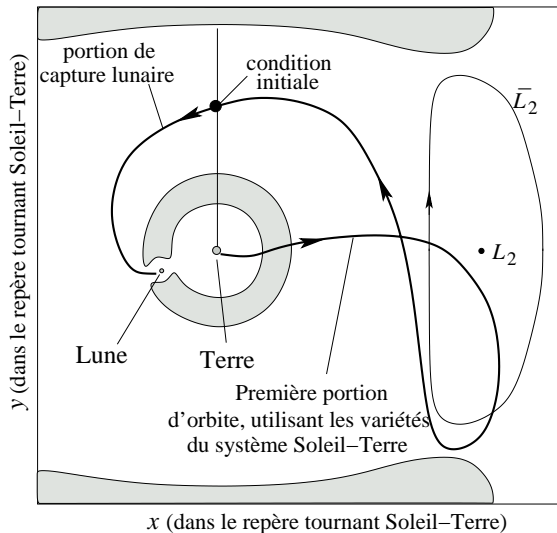


FIG. 5.6 – Illustration de la trajectoire complète du vaisseau spatial dans le repère tournant Soleil-Terre.

5.3 Brève conclusion

Nous pouvons maintenant donner quelques arguments de plus sur le choix du modèle des PPCR3C couplés dans l'approximation du système de quatre corps.

D'une part, quand nous sommes en dehors de la petite sphère d'influence de la Lune (20000 km), ses perturbations sur le système Soleil-Terre-vaisseau peuvent être négligées. D'autre part, le ΔV utilisé à mi-parcours marque le point de départ de l'utilisation du système Terre-Lune-vaisseau. À ce point précis, le vaisseau spatial est à l'intérieur de la sphère d'influence de la Terre (900000 km) où nous considérerons que les perturbations du Soleil sur le système sont négligeables.

Koon *et al.* (2001) ont pu calculer le bénéfice de l'utilisation de ce genre de manœuvres. Puisque la capture du vaisseau par la Lune se fait sans aucune propulsion, la quantité de fuel utilisée est diminuée d'environ 20% en comparaison avec un transfert de Hohmann traditionnel.

Enfin, terminons ce chapitre en signalant que ces techniques peuvent être utilisées dans beaucoup d'autres applications, comme par exemple dans un transfert entre sa-

tellites de Jupiter. Koon *et al.*, dans un autre article (2000 b), montrent que le ΔV nécessaire pour passer de Ganymède à Europe est réduit de moitié par rapport au ΔV utilisé lors d'un transfert classique de Hohmann.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons pu montrer, grâce à des techniques semi-analytiques empruntées à Koon *et al.* (2000), l'existence de connexions hétérocliniques entre des orbites périodiques ayant le même niveau d'énergie, dans le problème plan circulaire restreint des trois corps.

Nous avons auparavant mis en évidence l'importance des variétés invariantes associées à \overline{L}_1 et \overline{L}_2 , qui nous ont permis de prouver l'existence d'orbites homocliniques transversales dans les régions intérieure et extérieure.

En joignant ces connexions hétérocliniques aux tubes des variétés invariantes sur un même niveau d'énergie, nous avons défini les canaux dynamiques qui produisent un mécanisme de transit entre les régions intérieure et extérieure.

Enfin, nous avons montré par un exemple que non seulement l'intérieur des tubes des variétés invariantes permettait de guider les orbites, mais qu'il était également possible d'utiliser la région extérieure des variétés pour parvenir à diriger la trajectoire.

En employant toutes ces propriétés à bon escient il est alors possible d'économiser de manière considérable la quantité de fuel nécessaire à un transit entre différentes régions de l'espace. Les applications de cette théorie sont innombrables et nous permettent de nous rendre "économiquement" à de nombreux endroits du Système Solaire en nous faisant transporter le long des tubes des variétés invariantes.

Bibliographie

- [1] W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden et S.D. Ross (2000), *Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics*, Chaos, Vol. 10, No. 2, pp 427-442.
- [2] R.P. McGehee (1969), *Some homoclinic orbits for the restricted three-body problem*, thèse de doctorat, University of Wisconsin.
- [3] C. Conley (1968), *Low energy transit orbits in the restricted three-body problem*, SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math. No. 16, pp 732-746.
- [4] J. Llibre, R. Martinez et C.Simó (1985), *Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L_2 in the restricted three-body problem*, J. Diff. Eqns. No 58, pp 104-156.
- [5] G. Gómez, A. Jorba, J. Masdemont et C. Simó (1991), *Study Refinement of Semi-Analytical Halo Orbit Theory*, Final Report, ESOC Contract, Barcelona
- [6] V. Dentant (1996), *Effets des forces dissipatives sur la stabilité des équilibres de Lagrange*, mémoire de fin d'études, Dépt de Math., FUNDP Namur.
- [7] W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden et S.D. Ross (2000 b), *Constructing a Low Energy Transfer Between Jovian Moons*, Contemporary Mathematics, Vol. 292, pp 129-145
- [8] W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden et S.D. Ross (2001), *Low energy transfer to the Moon*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, No. 18, pp 63-73.